

**МІНІСТЕРСТВО ЮСТИЦІЇ УКРАЇНИ  
АКАДЕМІЯ ДЕРЖАВНОЇ ПЕНІТЕНЦІАРНОЇ СЛУЖБИ**

**Кафедра економіки та соціальних дисциплін**

ПОГОДЖЕНО:

Перший проректор,  
полковник внутрішньої служби,  
к.ю.н., доцент

Олійник О.І.

«\_\_\_»\_\_\_\_\_ 2020 р.

**СИЛАБУС**

**навчального курсу «Економіко-математичні методи і моделі»  
спеціальність 051 «Економіка»  
форма навчання: денна**

РОЗРОБНИК:

викладач

Лісова М.А. \_\_\_\_\_

ЗАТВЕРДЖЕНО:

на засіданні кафедри економіки та  
соціальних дисциплін

Протокол № \_\_ від «\_\_»\_\_\_\_\_ 2020 р.

Кредити та кількість  
годин:

4 кредити ECTS; години: 20 годин лекцій, 20 годин  
семінарських занять, 20 годин практичних занять та  
60 годин самостійна робота.

**Чернігів – 2020**

**МІНІСТЕРСТВО ЮСТИЦІЇ УКРАЇНИ  
АКАДЕМІЯ ДЕРЖАВНОЇ ПЕНІТЕНЦІАРНОЇ СЛУЖБИ**

**Кафедра економіки та соціальних дисциплін**

**СИЛАБУС**

**навчального курсу «Економіко-математичні методи і моделі»  
спеціальність 051 «Економіка»  
форма навчання: денна**

Кредити та кількість годин: 4 кредити ECTS; години: 20 годин лекцій, 20 годин семінарських занять, 20 годин практичних занять та 60 годин самостійна робота.

**Чернігів – 2020**

### Анотація курсу

Для сучасної математики характерне інтенсивне проникнення в інші галузі знань, зокрема в економічні науки. Мова математики виявилася універсальною, що репрезентує об'єктивне відображення універсальності економічних законів.

Економіка як наука про об'єктивні причини розвитку суспільства ще з ранніх часів у своїх діяльності користується різноманітними кількісними характеристиками, і тому вона акумулювала в собі велике число математичних методів. Сьогодні в економічній науці на перший план ставиться математична модель як дієвий інструмент дослідження та прогнозування розвитку економічних процесів і явищ.

Математична модель розвиває наші уявлення про закономірності та взаємозв'язки економічних процесів і допомагає формуванню наукового мислення та навичок порівняльного аналізу на новому, більш високому рівні. Тому для визначення характерних особливостей класу математичних моделей, які застосовуються в економіці, використовується термін «економіко-математичне моделювання». Економіко-математичне моделювання як навчальна дисципліна поєднує теорію трьох дисциплін – економіки, математики та інформатики.

Освоєння математичних методів і інструментарію наукових досліджень дасть можливість майбутньому спеціалістові сформуванню необхідні компоненти мислення: компетентність, світогляд і культуру, які будуть фахівцеві потрібні як у теоретичному плані, так і в плані орієнтації в професійній практичній діяльності.

### Мета курсу

Метою навчальної дисципліни «Економіко-математичні методи і моделі» є формування системи знань з методології, методики та інструментарію побудови математичних моделей економічних систем, їх аналізу та використання.

### Організація навчання

#### Тематичний план

№	Назва теми	Всього годин	Лекції	Семінари	Практичні заняття	Самостійна робота
1	Теоретичні основи математичного моделювання економіки	10	2	4	0	4
2	Оптимізаційні економіко-математичні моделі	10	2	4	0	4
3	Загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування	14	2	2	4	6
4	Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування	16	2	2	4	8
5	Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач	12	2	0	2	8
6	Транспортна задача: постановка, методи розв'язання та аналізу	12	2	2	2	6
7	Задачі цілочислового лінійного програмування та методи їх розв'язання	12	2	2	2	6
8	Задачі дробово-лінійного програмування	10	2	0	2	6
9	Задачі нелінійного	12	2	2	2	6

	програмування					
10	Задачі динамічного програмування	12	2	2	2	6
Всього годин за курсом		120	20	20	20	60

### **Завдання до семінарів, практичних занять та самостійна робота**

#### **ТЕМА 1. Теоретичні основи математичного моделювання економіки**

##### **Питання до семінарського заняття:**

- 1 Економіка як об'єкт моделювання. Особливості та принципи математичного моделювання економічних систем і процесів
- 2 Елементи класифікації економіко-математичних моделей.
- 3 Випадковість і невизначеність процесів економічних систем.
- 4 Адекватність економіко-математичних моделей.
- 5 Предметна область економіко-математичного моделювання
- 6 Практичне завдання економіко-математичного моделювання.
- 7 Технологія економіко-математичного моделювання.

##### **Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):**

1. Основні складові моделювання соціально-економічних процесів.
2. Підходи математичного опису складної системи.
3. Задачі системного аналізу.
4. Основні етапи моделювання та їх характеристики.
5. Основні складові економіко-математичної моделі.
6. Визначення виду і характеру економіко-математичної моделі.
7. Якісні характеристики основних економічних моделей.
8. Схематична класифікація економіко - математичних моделей.
9. Дефініція загальних принципів економіко-математичного моделювання.

**Література:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

#### **ТЕМА 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі**

##### **Питання до семінарського заняття:**

- 1 Основні складові оптимізаційної математичної моделі.
- 2 Приклади економічних постановок задач, що приводять до оптимізаційних математичних моделей.
- 3 Постановка класичної лінійної задачі математичного програмування.
- 4 Характеристика видів економіко-математичних моделей оптимізаційних задач.

##### **Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):**

1. Модель оптимізації виробничої програми підприємства.
2. Модель оптимізації розподілу фінансових ресурсів.
3. Модель з оптимізації зростання потужностей підприємства.
4. Модель оптимізації розподілу капітальних вкладень по проектам.
5. Методи побудови компромісних планів.
6. Модель оптимізації процесу фінансування з урахуванням часового фактора.
7. Модель оптимальної структури інвестиційного портфеля.
8. Моделювання конкурсів інвестиційних проектів.
9. Одноетапна динамічна модель синхронного інвестиційно- фінансового планування.

**Література:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

#### **ТЕМА 3. Загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування**

##### **Питання до семінарського заняття:**

- 1 Форми запису задач лінійного програмування.
- 2 Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування.

### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох моделей обробляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки (у хвиликах) однієї полиці кожної моделі подано таблиці.

Верстати	Тривалість обробки полиці, хв., за моделями	
	А	В
1	30	15
2	12	26

Час роботи верстатів 1 та 2 становить відповідно 40 та 36 год. на тиждень. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень. Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми. Побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Задача 2. Розв'язати вище наведену економіко-математичну модель графічним методом.

#### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

1. Форми запису задач лінійного програмування.
2. Властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування.
3. Область застосування лінійної оптимізаційної математичної моделі в економіці.
4. Комп'ютерні технології розв'язку лінійних оптимізаційних задач
5. Сутність та математична постановка задачі використання сировини.
6. Сутність та математична постановка задачі на розкрій матеріалів.
7. Сутність та математична постановка задачі складання раціону.
8. Сутність та математична постановка задачі комівояжера.

#### Практична частина

Завдання 1. Записати в канонічній формі таку задачу ЛП:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \max \quad \text{за умов}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Завдання 2. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом. Знайти і максимум і мінімум цільової функції.

$$Z = 3x_1 + 7x_2 - 5 \quad (\text{extr}),$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ 10x_1 + 13x_2 \leq 130, \\ -6x_1 + 8x_2 \leq 48, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Література: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

## ТЕМА 4. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

### Питання до семінарського заняття:

1 Прикладне використання симплекс – методу для розв'язування задач лінійного програмування

2 Сучасні інформаційні технології для розв'язування задач лінійного програмування симплексним методом.

### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Для виготовлення двох видів продукції  $P_1$  та  $P_2$  використовуються три види сировини  $S_1$ ,  $S_2$  та  $S_3$ . Запаси сировини, норми витрат сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду та дохід від одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції	
		$P_1$	$P_2$
$S_1$	275	4	5
$S_2$	680	13	8
$S_3$	60	1	1
Дохід від одиниці продукції		9	6

Необхідно знайти такий план виробництва, який забезпечить найбільший сумарний дохід.

Задача 2 З допомогою симплекс-методу знайти розв'язок задачі лінійного програмування:

$$Z = -16x_1 - 18x_2 + 13 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 7x_1 - 5x_2 \leq 35, \\ 8x_1 + 9x_2 \leq 72, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 3. Розв'язати задачу лінійного програмування методом штучного базису:

$$z = 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 10 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

1. Типи математичних задач, для розв'язання яких застосовується симплексний метод?
2. Економічні постановки задач, що розв'язуються симплексним методом.
3. Умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.
4. Геометрична інтерпретація симплексного методу.
5. Модифікації симплексного методу
6. Типи математичних задач, для розв'язання яких застосовується метод штучного базису?
7. Які сучасні інформаційні технології можна використовувати для розв'язування задач лінійного програмування?

### Практична частина

Завдання 1 На підприємстві можна організувати виробництво продукції двома способами, при цьому необхідно мати три види ресурсів: сировину, обладнання і електроенергію. Витрати ресурсів за один місяць і наявний загальний їх обсяг представлено в таблиці:

Ресурси	Витрати ресурсів за 1 місяць при організації виробництва		Запаси ресурсів
	1-м способом	2-м способом	
Сировина	1	2	4
Обладнання	1	1	3
Електроенергія	2	1	8

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тисячі виробів, при другому – 4 тисячі виробів.

Скільки місяців має пропрацювати підприємство кожним із способів, щоб за наявності ресурсів забезпечити максимальний випуск продукції?

Необхідно: скласти математичну модель задачі, привести її до канонічного вигляду та розв'язати симплексним методом у симплексній таблиці.

Завдання 2 Розв'язати задачу лінійного програмування методом штучного базису:

$$Z = 7x_1 + 3x_2 - 12 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \leq 30, \\ 13x_1 - 8x_2 \leq 104, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Література: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

### ТЕМА 5. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Знайти максимальне значення функції

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7$$

При обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 2. Скласти двоїсту задачу до вихідної задачі

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 275, \\ 13x_1 + 8x_2 \leq 680, \\ x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

#### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

1. Економічна інтерпретація пари двоїстих задач лінійного програмування.
2. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст.
3. Огляд задач в економіці, які зводяться до розв'язання задач лінійного параметричного програмування.
4. Післяоптимізаційний аналіз розв'язків лінійних оптимізаційних задач.
5. Задачі ЛП з параметрами у вільних членах обмежень.

## Практична частина

Завдання 1 Скласти двоїсту задачу до вихідної (прямої) задачі

$$Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \leq 540 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 500 \\ 14x_1 + 7x_2 \leq 980 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Завдання 2 Скласти двоїсту задачу до вихідної (прямої) задачі

$$\min F = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \leq 8, \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \geq -16. \end{cases}$$

Література: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

## ТЕМА 6. Транспортна задача: постановка, методи розв'язання та аналізу

### Питання до семінарського заняття:

- 1 Прикладне застосування транспортних задач.
- 2 Економічні задачі, що зводяться до задач транспортного типу.

### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Методом північно-західного кута (діагональним) знайти початковий опорний план перевезення однорідного вантажу від постачальників  $A_1, A_2, A_3$  з запасами  $a_1=200, a_2=150, a_3=175$  до споживачів  $B_1, B_2, B_3, B_4$  з потребами в цьому вантажі  $b_1=140, b_2=125, b_3=90, b_4=170$ , якщо відома вартість перевезення одиниці вантажу від постачальників до споживачів:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Методом найменшої вартості знайти початковий опорний план перевезення за даними задачі 1.

Задача 3 Знайти оптимальний план перевезення однорідного вантажу від постачальників  $A_1, A_2, A_3, A_4$  з запасами  $a_1=90, a_2=85, a_3=125, a_4=105$  до споживачів  $B_1, B_2, B_3$  з потребами в цьому вантажі  $b_1=110, b_2=155, b_3=140$ , який забезпечить мінімальну вартість перевезення вантажу, якщо відома вартість перевезення одиниці вантажу від постачальників до споживачів:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

- 1 Виродження плану транспортної задачі.
2. Задача про призначення.
- 3 Розподільна задача з пропорційними продуктивностями.
- 4 Задача про заміну устаткування.
5. Однопродуктова модель поточного перспективного планування.
6. Модель формування штатного розпису фірми.
7. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів банку.



### Практична частина

Завдання 1 Компанія контролює три фабрики  $A_1, A_2, A_3$ , здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в матриці:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

За даними задачі необхідно:

- 1) Перевірити збалансованість транспортної задачі. Якщо задача незбалансована, то привести її до збалансованого виду. Зобразити задачу у вигляді таблиці.
- 2) Побудувати математичну модель задачі (цільову функцію та систему обмежень)
- 3) Знайти початковий опорний план двома методами:
  - діагональним методом (північно-західного кута)
  - методом найменших витрат
- 4) Перевірити знайдений початковий план на умову виродженості (тобто правильність визначення плану)

Література: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

### ТЕМА 7. Задачі цілочислового лінійного програмування та методи їх розв'язання

#### Питання до семінарського заняття:

- 1 Економічні задачі, що належать до класу задач цілочислового лінійного програмування.
- 2 Основні аналітичні властивості розв'язків цілочислового лінійного програмування.

#### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Знайти розв'язок задачі цілочислового лінійного програмування методом Гоморі:

$$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 + 5 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{цілі}. \end{cases}$$

Задача 2 Знайти розв'язок задачі цілочислового програмування методом «віток і меж»:

$$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 + 5 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{цілі}. \end{cases}$$

#### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

- 1 Приклади економічних задач, що належать до класу задач цілочислового лінійного програмування.
- 2 Модель формування інвестиційної програми при заданому бюджеті.
- 3 Основні групи методів розв'язування задач цілочислового програмування.

4 Охарактеризуйте методи відтинання.

5 На чому базуються комбінаторні методи цілочислової оптимізації?

6 Як розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом?

### Практична частина

Завдання 1 Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі.

$$Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа.} \end{cases}$$

Завдання 2 За даними завдання 1 розв'язати задачу цілочислового програмування методом «віток і меж».

Завдання 3 Розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ цілі числа.} \end{cases}$$

Література: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

### ТЕМА 8. Задачі дробово-лінійного програмування

#### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Розв'язати графічно задачу дробово-лінійного програмування:

$$Z = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \max (\min) \text{ за умов:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Задача 2. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування симплексним методом:

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max \text{ за умов:}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 12; \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 9; \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 = 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

#### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

1 Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування.

2 Розв'язування дрібно-лінійної задачі зведенням до задачі лінійного програмування.

### Практична частина

Завдання 1. Фірма випускає чотири типи світильників, для чого закуповує металеві прутки, довжиною 6 і 8 м відповідно, які необхідно розкроїти на деталі чотирьох типорозмірів — 1,5; 1,2; 0,9 і 0,7 м, котрі будуть використані фірмою «Success» для випуску світильників. Метою розв'язку даної задачі є знаходження оптимального плану розкрою, тобто потрібно з розроблених варіантів розкрою відшукати таку їх множину, щоб потреба в деталях усіх типорозмірів була задоволена повністю і загальні відходи ресурсів були б найменшими.

Література: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11.

## ТЕМА 9. Задачі нелінійного програмування

### Питання до семінарського заняття:

- 1 Застосування нелінійних оптимізаційних задач в економіці.
- 2 Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування.

### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$Z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 2 Розв'язати графічним методом задачу нелінійного програмування:

$$Z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \text{extr},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 3 Визначити оптимальні значення функції:

$$z = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

при обмеженні

$$x_1 + x_2 = 3.$$

### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

- 1 Область застосування нелінійних оптимізаційних задач в економіці.
2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування.
3. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування.
4. Квадратичне програмування.
5. Основні види задач нелінійного програмування.
6. Сформулюйте теорему Куна-Таккера.
7. Прикладне використання методу множників Лагранжа
8. Модель задачі квадратичного програмування і особливості її розв'язування.
9. Етапи розв'язування задачі нелінійного програмування методом кусково-лінійної апроксимації.

### Практична частина

Завдання 1. Фірма планує витрати 20000 грн. на рекламу. Одна хвилина реклами на телебаченні коштує 1000 грн., а на радіо – 500 грн. Аналітики фірми прогнозують збільшення приросту доходу фірми від використання рекламних засобів за такою функцією:  $Z(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y$ , де  $Z(x, y)$  – приріст доходу фірми (тис. грн.) від реклами;  $x$  – тривалість (хв.) рекламного ролика на телебаченні;  $y$  – тривалість (хв.) рекламного ролика на радіо. Яким чином потрібно поєднати рекламу на телебаченні та радіо, щоби отримати максимальне значення приросту доходу фірми, економно використавши при цьому наявні грошові засоби на рекламу?

Завдання 2. Компанія виробляє два види взаємозамінної продукції виду  $A$  і  $B$ . Аналітики фірми експертно визначили функцію сумарних витрат, які необхідні для випуску продукції  $Z(x, y) = 8x^2 - xy + 12y^2$ . Відомо, що сумарний обсяг продукції обох видів буде дорівнювати 42 одиницям. Перед менеджерами компанії поставлене завдання: визначити обсяги продукції  $A$  і  $B$ , при яких сумарні затрати на виробництво будуть мінімальними.

Завдання 3. Розв'язати задачу методом множників Лагранжа. Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під

основні рослинницькі культури — озиму пшеницю та цукрові буряки.

Техніко-економічні показники вирішування цих культур від бивас таблиця:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю, $x_1$	під цукровий буряк, $x_2$
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн./т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12,5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12,5x_2^2 - 150x_1 + 650$

Література: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11.

## ТЕМА 10. Задачі динамічного програмування

### Питання до семінарського заняття:

- 1 Типи економічних задач, що розв'язуються методами динамічного програмування.
- 2 Процес керування в задачах динамічного програмування.

### Ситуаційні задачі або вправи до практичного заняття:

Задача 1. Для збільшення випуску продукції фірма може виділити інвестиції розміром  $x = 200$  млн. грн. своїм чотирьом підприємствам на певний період. Приріст продукції, який може отримати кожне підприємство при виділенні йому відповідних інвестицій, представлений у таблиці. Потрібно знайти оптимальний варіант вкладів інвестицій і дати економічний аналіз ефективності проведених заходів.

Розмір інвестицій, млн. грн., $x$	Приріст продукції, млн.грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

Задача 2. До початку планового періоду в цеху встановлено устаткування.

Залежність продуктивності цього устаткування від часу використання його цехом, а також залежність витрат на утримання й ремонт устаткування при різних термінах його використання наведені в таблиці:

Характеристика устаткування	Час, протягом якого використовується устаткування					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції, млн. грн.	100	85	75	70	70	65
Річні витрати, пов'язані з утриманням і ремонтом устаткування, млн. грн.	30	35	40	45	55	65

### Завдання для самостійної роботи (підготувати реферати):

1. Прикладні моделі динамічного програмування.
2. Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами.
3. Характерні особливості математичної моделі динамічного програмування.
4. Процес керування в задачах динамічного програмування.
5. Модель оптимальної заміни устаткування.
6. Етапи реалізації методів динамічного програмування.
7. Розв'язання задачі динамічного програмування в аналітичній формі.
8. Ідея алгоритмів прямої та зворотної прогонки.

### Практична частина

Завдання 1. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено

інвестиційні проекти, які відбивають прогнозовані сумарні витрати  $C$  та доходи  $D$ , пов'язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів ілюструє таблиця:

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	$C_1$	$D_1$	$C_2$	$D_2$	$C_3$	$D_3$	$C_4$	$D_4$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план 1 інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

**Література:** 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11.

### Порядок оцінювання

Оцінювання ваших досягнень відбувається за системою відображеною в Таблиці 1

Таблиця 1

№	Назва теми	Всього балів	Форма заняття		
			Лекції (ведення конспекту)	Семінари (конспектування, питань, виступ, доповнення)	Практичні заняття (опрацювання матеріалів для підготовки, успішне виконання завдань)
1.	Теоретичні основи математичного моделювання економіки	6	-	6	-
2.	Оптимізаційні економіко-математичні моделі	6	-	6	-
3.	Загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування	6	-	3	3
4.	Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування	6	-	3	3
5.	Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач	6	-	-	6
6.	Транспортна задача: постановка, методи розв'язання та аналізу	6	-	3	3
7.	Задачі цілочислового лінійного програмування та методи їх розв'язання	6	-	3	3
8.	Задачі дробово-лінійного програмування	6	-	-	6
9.	Задачі нелінійного програмування	6	-	3	3
10.	Задачі динамічного програмування	6	-	3	3
Разом		60	-		
Екзамен			40		
Всього			100 балів		

Робота на семінарах оцінюється за наступними критеріями:

- ваша присутність та виступ із рефератом (презентацією) на питання самостійної роботи даної теми може принести вам один бал за умови, що відповідь буде змістовною та обґрунтовною;

- якщо, при виступі, ви проявите ґрунтовну підготовку, висловіте власну точку зору щодо висвітлюваної проблеми й підкріпите її аргументацією, правильно відповісте на уточнюючі питання викладача то можете отримати ще 1 бал.

- для того аби отримати ще один бал слід брати участь в опрацюванні семінарських питань (доповнення, відповідь на питання викладача, висловлення своєї обґрунтованої точки зору під час обговорення проблемних питань);

Таким чином ваша участь в роботі семінару може принести вам до 3 балів за одне заняття. Пропущений семінар відпрацьовується відповідями на питання викладача за змістом семінару.

Робота на практичних заняттях оцінюється за наступними критеріями:

- ваша присутність та участь в опрацюванні контрольних питань оцінюється в 1бал;

- надання правильних відповідей на тестові завдання оцінюється в 1бал;

- виконання на занятті ситуаційних вправ та розв'язування задач може принести вам ще 1 бал;

- якщо при виконанні практичних завдань ви проявите ґрунтовну підготовку, висловіте власну точку зору щодо висвітлюваної проблеми й підкріпите її аргументацією, правильно відповісте на уточнюючі питання викладача, то можете отримати ще 1 бал.

Таким чином ваша робота на одному практичному занятті може принести вам від 3 до 6 балів. Пропущене заняття відпрацьовується відповідями на питання викладача та виконанням практичних завдань даної теми.

Самостійна робота оцінюється викладачем в розрізі теми, що вивчається.

Підсумковий контроль з дисципліни здійснюється на екзамені, на якому ви можете отримати до 40 балів в залежності від повноти та обґрунтованості ваших відповідей. Схема переведення балів у підсумкову оцінку наведена в Таблиці 2.

Таблиця 2

### Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90 – 100	<b>A</b>	відмінно
82-89	<b>B</b>	добре
75-81	<b>C</b>	
64-74	<b>D</b>	задовільно
60-63	<b>E</b>	
35-59	<b>FX</b>	незадовільно з можливістю повторного складання
0-34	<b>F</b>	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

### Орієнтовний перелік питань для здачі екзамену:

1. Які основні методологічні принципи моделювання?
2. Яка основна суть кожного методологічного принципу моделювання?
3. Дайте визначення математичної моделі.
4. Які основні типи моделей?
5. Як класифікуються економіко-математичні моделі?
6. Які особливості оптимізаційних моделей?
7. Наведіть класифікацію оптимізаційних задач.
8. Наведіть постановку загальної оптимізаційної моделі.

9. Які типові задачі лінійного програмування розрізняють?
10. Який вигляд має задача лінійного програмування в канонічній формі?
11. Які задачі лінійного програмування можна розв'язати графічно?
12. Які основні етапи графічного методу розв'язання задач лінійного програмування?
13. Наведіть властивості можливих розв'язків задачі лінійного програмування.
14. Для розв'язання яких математичних задач використовується симплексний метод?
15. У чому суть симплекс-методу?
16. На яких властивостях задач лінійного програмування заснований симплекс-метод?
17. Як визначити початковий опорний план задачі лінійного програмування?
18. Сформулюйте послідовність етапів практичної реалізації симплекс-методу у ході розв'язування задач лінійного програмування.
19. Які ознаки оптимальності базисного плану?
20. Коли виникає необхідність використання симплекс-методу з штучним базисом?
21. У чому суть проблеми виродження?
22. Наведіть приклади практичного використання теорії двоїстості.
23. Сформулюйте правила складання умов взаємно двоїстих задач.
24. Сформулюйте основні теореми теорії двоїстості.
25. Поясніть економічний зміст теорем двоїстості.
26. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
27. У чому полягає аналіз стійкості двоїстих оцінок?
28. У чому суть двоїстого симплекс-методу?
29. Опишіть економіко-математичну модель транспортної задачі.
30. Назвіть методи розв'язування транспортної задачі.
31. Як розв'язати транспортну задачу у випадку виродження?
32. Наведіть економічну і математичну постановку задачі дробово-лінійного програмування.
33. Які методи застосовуються для розв'язання задачі дробово-лінійного програмування?
34. Яка геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування?
35. Як розв'язання дробово-лінійної задачі зводиться до задачі лінійного програмування?
36. Які задачі в економіці потребують цілочислового розв'язку?
37. Запишіть в загальному вигляді математичну модель цілочислового програмування.
38. Як розв'язати задачу цілочислового програмування графічним методом?
39. Яка геометрична інтерпретація розв'язків цілочислової задачі на площині?
40. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
41. Розкажіть загальну ідею реалізації методу віток і меж.
42. У чому полягає відмінність задач нелінійного програмування від лінійного?
43. Як задача нелінійного програмування розв'язується графічно?
44. У чому полягає ідея методу множників Лагранжа?
45. У чому суть теореми Куна–Таккера?
46. Які загальні теоретичні викладки методів динамічного програмування?
47. Наведіть етапи реалізації методів динамічного програмування.

### **Політика академічної доброчесності**

Прослуховуючи цей курс, Ви погодились виконувати положення принципів академічної доброчесності:

- складати всі проміжні та фінальні завдання самостійно без допомоги сторонніх осіб;
- надавати для оцінювання лише результати власної роботи;
- не вдаватися до кроків, що можуть нечесно покращити ваші результати чи погіршити/покращити результати інших курсантів (студентів, слухачів);
- не публікувати відповіді на питання, що використовуються в рамках курсу для оцінювання знань курсантів (студентів, слухачів).

## Рекомендована література

### Основна

1. Вергунова І.М. Системне моделювання в економіці. К.: ТОВ «Наш формат», 2016. 134 с.
2. Вовк В.М., Зомчак Л.М. Оптимізаційні методи і моделі : Навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 360 с.
3. Глушик М. М., Копич І. М., Сороківський В. М. Математичне програмування: підруч. Львів : Новий Світ-2000, 2010. 280 с.
4. Економіко-математичне моделювання : навч. посібн. / Т. С. Клебанова, О. В. Раєвнева, С.В. Прокопович та ін. - Х.: ІНЖЕК, 2010. 328 с.
5. Калініченко А.В. Курс лекцій з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів економічних спеціальностей вищих аграрних закладів освіти. Полтава: ПДАА, 2010.136с.
6. Костоглод К. Д. Курс лекцій з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» Полтава: ПДАА, 2016.
7. Математичні методи в економіці: навч. посіб. / І.С.Благун, В.П.Кічор, Р.В.Фещур, С.Й.Воробець; за ред.. В.П.Кічора; Тернопіль: Навчальна книга –Богдан, 2011. 264с.
8. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання АПК. Львів: Вид-во «Магнолія 2006», 2013. 277 с.

### Додаткова

1. Григорків В.С.та ін. Оптимізаційні методи та моделі: вибрані завдання для тематичного контролю: навч. посіб. - Чернівці: ДрукАрт, 2013. 168с
2. Костоглод К.Д. Завдання з дисципліни “Економіко-математичне моделювання” для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки “Економіка та підприємництво. Полтава: ПДАА, 2008.
3. Кузьмичов А.І. Оптимізаційні методи і моделі: практикум в Excel: Навч. пос. К.: ВПЦ АМУ, 2013. 438 с.
4. Лугінін О. Є. Економіко-математичне моделювання. Навчальний посібник для ВНЗ. К.: Знання, 2011. 342 с.
5. Скицько А.І. Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Чернівці: Технодрук, 2014. 230 с.

### Інформаційні ресурси

1. Електронна бібліотека: «Буковина». [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://buklib.net/>
2. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Івашука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. –704 с.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. К.: КНЕУ, 2003. 408 с.