МІНІСТЕРСТВО ЮСТИЦІЇ УКРАЇНИ
АКАДЕМІЯ ДЕРЖАВНОЇ ПЕНІТЕНЦІАРНОЇ СЛУЖБИ

КАФЕДРА ЕКОНОМІКИ ТА СОЦІАЛЬНИХ ДИСЦИПЛІН

ПОГОДЖЕНО:
Начальник кафедри економіки
та соціальних дисциплін,
доктор економічних наук, професор,
полковник внутрішньої служби
Оксана ГОНЧАРЕНКО

_____

СИЛАБУС
навчального курсу «Вища математика.
Теорія ймовірності та математична статистика»
спеціальність 053 «Психологія»
форма навчання: денна

Чернігів – 2022

Анотація курсу

Навчальний курс «Вища математика. Теорія ймовірності та математична статистика» відноситься до обов'язкових навчальних дисциплін зі спеціальності 053 «Психологія».

Програма навчальної дисципліни складена кафедрою економіки та соціальних дисциплін Академії Державної пенітенціарної служби відповідно до освітньо-професійної програми підготовки фахівців на першому (бакалаврському) рівні вищої освіти з галузі знань 053 Психологія для денної форми навчання.

Навчальний курс «Вища математика. Теорія ймовірності та математична статистика» займає важливе місце у навчальному процесі, оскільки формує базові знання у сфері застосування ймовірнісно-статистичного апарата, вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх ймовірнісних характеристик з метою застосування до аналізу економічних явищ та прогнозування. Теорія ймовірностей і математична статистика є основою для побудови кількісних моделей керування економічними системами. Ймовірнісно-статистичні методи є базовими для теорії ухвалення рішень як важливої складової сучасного менеджменту.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є: основні методи та моделі лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, диференціального та інтегрального числення, теорії звичайних диференціальних рівнянь. Поряд з вивченням математичних понять розглядаються їх практичні застосування в економіці, управлінні та менеджменті.

Основними завданнями вивчення дисципліни:

– виконання дій над векторами, матрицями, обчислення визначників;

– розв`язування систем лінійних рівнянь;

– дослідження форм і властивостей прямих та площин, кривих і поверхонь другого порядку;

– знаходження границь;

– дослідження функції за допомогою диференціального числення;

– розвиток аналітичного мислення.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми курсанти та студенти повинні:

знати: основні поняття вищої математики такі як матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, вектори, границя та неперервність функції однієї та багатьох змінних, похідна, диференціал функції однієї та багатьох змінних, інтеграли, диференціальні рівняння

вміти: вибирати математичні методи та моделі, методичні прийоми математичного аналізу для дослідження прикладних задач; застосовувати сучасні математичні методи для розв'язування практичних економічних

задач та набути навичок самостійного використання і вивчення математичної літератур.

Курс «Теорія ймовірності та математична статистика. Вища математика» спирається на знання шкільного курсу математики і є базовим курсом, на якому базується вивчення інших дисциплін математичного циклу.

Метою викладання курсу «Вища математика. Теорія ймовірності та математична статистика» є формування у курсантів базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають у процесі управління та пояснення ролі і місця математичних методів при їх розв'язуванні.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ теми	Назви розділів і тем	Денна форма навчання				
		Усього	у тому числі			
			Л	СЗ	ПЗ	СР
Розділ 1. Лінійна алгебра та математичний аналіз						
1.	Лінійна алгебра	18	4	4	4	6
2.	Матриці	12	2	2	4	4
3.	Математичний аналіз	12	2	2	4	4
4.	Інтеграл, диференціальні рівняння і ряди	12	2	2	4	4
	Всього за розділ 1	**54**	**10**	**10**	**16**	**18**
Розділ 2. Теорія ймовірностей та математична статистика						
5.	Теорія ймовірностей	12	2	2	4	4
6.	Випадкові величини та їх характеристики	12	2	2	4	4
7.	Математична статистика	12	2	2	4	4
	Всього за розділ 2	**36**	**6**	**6**	**12**	**12**
	Усього годин	**90**	**16**	**16**	**28**	**30**

ПЛАНИ СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

ТЕМА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

СЕМІНАРСЬКЕ ЗАНЯТТЯ № 1

Питання і завдання для самоперевірки

1. Що таке числова вісь, відрізок, координата точки? Як знайти довжину відрізка на числовій осі? Скільки точок уміщає числова вісь, скільки точок може бути розміщено на відрізку числової осі?

2. Сформулюйте поняття системи координат на прямій, у площині і у просторі. Що таке координатна площина? Як знайти координати точки на площині?

3. Що таке векторна величина, компоненти вектора? Яким може бути фізичний зміст компоненти вектора? Що таке розмірність вектора? Як можна записати вектор? Як можна установити факт рівності двох векторів і в якому випадку можна стверджувати рівність двох векторів?

4. Як можна зобразити вектор на площині, у тривимірному і у ***n***-вимірному просторі?

5. Які операції над векторами називаються лінійними? Що таке лінійний ***n***-вимірний простір і як позначається такий простір у літературі?

6. Якими властивостями володіють лінійні операції над векторами?

7. У якому випадку система ***n***-вимірних векторів є лінійно залежною, а в якому – лінійно незалежною? Що таке колінеарність, компланарність векторів і як ці властивості пов'язані з лінійною залежністю векторів?

8. Що таке лінійна комбінація ***n***-вимірних векторів?

9. Як взаємопов'язані координати лінійно залежних векторів у тривимірному просторі? Як можна установити факт лінійної залежності або незалежності системи ***n***-вимірних векторів?

10. Що таке лінія на площині? Як можна записати рівняння кола в ко-ординатній та у параметричній формі? Якими є умови перетинання двох ліній на площині?

11. Запишіть рівняння прямої лінії на площині, яка (лінія) проходить через дві точки, рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом, загальне рівняння прямої лінії та поясніть сенс коефіцієнтів, які входять у ці рівняння. Що є кутовим коефіцієнтом прямої лінії на площині і який його геометричний зміст?

12. Як знайти кут між двома прямими лініями на площині?

13. Як з'ясувати, чи належить точка даній прямій лінії?

14. Як установити факт взаємної паралельності або перпендикулярності двох прямих ліній?

15. Що таке нормальне рівняння прямої лінії? Чому дорівнює сума квадратів коефіцієнтів при змінних x та y в такому рівнянні?

16. Як можна знайти відстань від точки до прямої лінії?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
2. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
4. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
5. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

СЕМІНАРСЬКЕ ЗАНЯТТЯ № 2

Питання і завдання для самоперевірки

1. Що таке півплощина у просторі $\boldsymbol{R}_2$? Як записати рівняння півплощини і як дізнатися, чи належить точка даній півплощині?

2. Як записати загальне рівняння площини в тривимірному просторі (у $\boldsymbol{R}_3$), як цей запис пов'язаний із скалярним добутком векторів?

3. Що таке вектор нормалі до площини?

4. Як можна знайти кут між двома площинами в $\boldsymbol{R}_3$ і як можна установити факт взаємної паралельності або перпендикулярності двох площин
у тривимірному просторі?

5. Що таке направляючий вектор прямої лінії і як він пов'язаний із канонічним рівнянням прямої лінії в $\boldsymbol{R}_3$?

6. Як знайти кут між двома прямими лініями в $\boldsymbol{R}_3$ і як можна установити факт їх взаємної паралельності або перпендикулярності?

7. Як знайти кут між прямою лінією і площиною?

8. Як можна записати рівняння гіперплощини, півпростору і прямої лінії в $\boldsymbol{R}_n$?

9. Що таке направляючий вектор прямої лінії в просторі $\boldsymbol{R}_n$?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.

2. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
4. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
5. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

ТЕМА 2. МАТРИЦІ

Питання і завдання для самоперевірки

1. Що таке матриця, як вона пов'язана із системою лінійних рівнянь, що таке розширена матриця? Як позначається матриця, що таке розмірність матриці і як вона позначається? Де знаходиться головна і побічна діагоналі матриці і для яких типів матриць існують такі діагоналі? Як записуються матриці: діагональна, одинична і нульова? Що таке транспонована матриця?

2. Що таке формули Крамера, для чого використовуються і як записуються?

3. У якому випадку дві матриці називаються рівними одна одній? У якому випадку і як можна знайти суму матриць, різницю матриць? Як можна помножити матрицю на число? Що таке протилежна матриця?

4. У якому випадку і як можна перемножити дві матриці? Які властивості притаманні добутку матриць?

5. Що таке власний вектор і власне число матриці?

6. Що таке визначник квадратної матриці, як можна знайти значення визначника другого і третього порядку? Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента матриці?

7. Які властивості притаманні визначникам?

8. Як можна знайти визначник квадратної матриці, використовуючи розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика?

9. Що таке матриця особлива, неособлива і обернена матриця? Як знайти обернену матрицю?

10. Що таке ранг матриці, базисний мінор? Які перетворення матриці називаються еквівалентними і як їх можна використовувати для відшукання рангу матриці?

11. Коли система лінійних рівнянь називається однорідною, неоднорідною, визначеною, невизначеною, сумісною і несумісною? Чи завжди однорідна система лінійних рівнянь має розв'язання

12. Як за допомогою оберненої матриці знайти розв'язання системи ***n*** лінійних рівнянь із ***n*** невідомими?

13. Сформулюйте теорему Кронекера–Капелі.

14. Коли система лінійних рівнянь має нескінченне число розв'язків? Яка система рівнянь називається еквівалентною і скільки рівнянь вона містить? Що таке базисні і небазисні (вільні) змінні і як вони взаємопов'язані? Чим відрізняється загальне розв'язання системи ***m*** рівнянь із ***n*** невідомими від її часткового і базисного розв'язання?

Контрольні питання

1. У чому полягає ідея і алгоритм розв'язання системи лінійних рівнянь методом повного виключення (методом Жордана – Гауса)?

2. За якою ознакою можна встановити несумісність системи рівнянь у реалізації методу повного виключення?

3. Як реалізується табличний варіант методу повного виключення?

4. Яка форма зображення і який порядок виконання кроків при розв'я-занні системи лінійних рівнянь методом повного виключення?

5. Як можна контролювати коректність обчислень при реалізації методу повного виключення?

6. Чому дорівнює максимальне число кроків при відшуканні розв'язання методом повного виключення і що відбудеться, якщо зробити більше число кроків?

7. Як записуються формули методу повного виключення і який порядок їх застосування при використанні табличного варіанту методу повного виключення?

8. Які додаткові завдання можуть бути розв'язані з використанням ме-тоду повного виключення?

9. Як можна знайти обернену матрицю системи, використовуючи метод повного виключення?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
2. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.

4. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
5. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Питання і завдання для самоперевірки

1. Які числа складають множину дійсних чисел? Чим відрізняються числа раціональні від ірраціональних?
2. Як знайти число, обернене до числа a, і число, протилежне числу a? У чому розходження понять “інтервал”, “відрізок” і “напівінтервал”? Чому дорівнює модуль числа a?
3. Що таке функція, область визначення функції? Які функції називаються основними елементарними функціями?
4. Чим відрізняються парні функції від непарних?
5. Дайте визначення понять: границя функції, однобічна границя, нескінченно мала функція.
6. Сформулюйте основні властивості нескінченно малих функцій: добуток нескінченно малої функції на обграничену, сума нескінченно малих функцій, нескінченно малі функції – еквівалентні, одного порядку малості, більш високого порядку малості.
7. Назвіть основні теореми про границі функцій (границя суми, добутку частки функцій). Які відомі виняткові границі?
8. Які функції називаються нескінченно великими функціями?
9. Сформулюйте необхідну і достатню умову безперервності функції в точці, на інтервалі. Які точки називаються точками розриву функцій: усувного розриву, розриву першого і другого роду?
10. Яким може бути порядок дослідження функції на безперервність?

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняттю “похідна функції”, поясніть геометричний сенс цього поняття.
2. Сформулюйте основні правила диференціювання функцій: диференціювання суми, добутку, частки функцій, диференціювання складної функції. Поясніть, як знаходяться похідні вищих порядків?
3. Що таке диференціал функції і як можна його використовувати в наближених обчисленнях? Поясніть принцип використання формули Тейлора (Маклорена) для наближеного зображення функцій.

4. Сформулюйте правило Лопіталя, що використовують при відшуканні границі відношення функцій.

5. Сформулюйте умови зростання (або спаду) функції в точці, на інтервалі.

6. Які точки значень функції називаються екстремальними і які критичними? Як можна формально записати умову мінімуму (або максимуму) функції в точці?

7. Сформулюйте необхідні і достатні умови мінімуму (максимуму) функції в точці екстремуму.

8. Для функції декількох змінних сформулюйте визначення понять: множина значень, область визначення, часткове значення в точці, лінія рівня, частковий і повний приріст функції декількох змінних у точці.

9. Що таке часткові похідні першого і другого порядку, змішані і повна похідні?

10. Як можна використовувати повний диференціал функції для оцінки похибки обчислення значень функції багатьох змінних?

11. Що таке градієнт функції?

12. Як можна обчислити градієнт функції?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
2. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
4. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
5. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

ТЕМА 4. ІНТЕГРАЛ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І РЯДИ

Питання і завдання для самоперевірки

1. Що таке невизначений інтеграл і якими основними властивостями він володіє? Поясніть суть основних методів

інтегрування: безпосереднє інтегрування, підстановка, інтегрування частинами.

2. Сформулюйте поняття “визначений інтеграл” і поясніть його можливу геометричну інтерпретацію. Поясніть основні властивості визначеного інтеграла: перестановка границь інтегрування, інтеграл з однаковими границями, інтеграл від суми функцій та ін.

3. Як можна обчислити значення визначеного інтеграла?

4. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніца і поясніть способи обчислення визначеного інтеграла: заміна змінної й інтегрування частинами.

5. Напишіть формулу і поясніть спосіб обчислення площ плоских фігур у декартових координатах із використанням визначеного інтеграла.

6. У яких випадках виникає поняття “невласний інтеграл”?

7. Поясніть основні способи обчислення невласних інтегралів.

8. Сформулюйте поняття “диференціальне рівняння”.

9. Яка функція називається загальним і яка частковим розв’язанням диференціального рівняння?

10. Що таке початкові умови розв’язання і як можна сформулювати задачу Коші?

11. Поясніть принцип розв’язання диференціального рівняння першого порядку з поділеними змінними.

Контрольні питання

1. Що таке числовий ряд, часткова сума ряду, залишок ряду?
2. Як можна оцінити значення залишку знакопочережного ряду?
3. Сформулюйте умову збіжності числового ряду та ознаку Даламбера.
4. Чим відрізняється функціональний ряд від числового?
5. Що таке область і радіус збіжності функціонального ряду і як можна їх визначити?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
2. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп’юка, 2003. 480 с.
3. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.

4. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
5. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

ТЕМА 5. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Питання і завдання для самоперевірки

1. Що називається перестановкою, розміщенням, сполученням? Запишіть формули для розрахунку цих величин.
2. Які події в теорії ймовірностей прийнято уважати випадковими?
3. Що таке ймовірність події?
4. Які події називаються вірогідними, а які – неможливими? Чому дорівнює ймовірність таких подій?
5. Які події вважаються сумісними, несумісними, рівноможливими, протилежними? Що можна сказати про ймовірність таких подій?
6. Які події складають повну групу подій і чому дорівнює ймовірність такої групи подій?
7. Як і чому можна розрахувати ймовірності подій у схемі випадків?
8. Що таке сума і добуток двох подій?
9. Як знайти ймовірність суми і добутку двох і більш подій з урахуванням їх сумісності або/і несумісності?
10. Що таке умовна ймовірність події?
11. Запишіть формулу Байєса і поясніть використані позначення. Як можна використувати цю формулу для прояснення економічної або іншої ситуації за непрямими ознаками?
12. Для яких умов використовується формула Бернуллі? Запишіть її вираз і поясніть використані позначення.

Контрольні питання

1. Яка величина називається випадковою і коли варто уважати таку величину дискретною, а коли – безперервною?
2. Що таке закон розподілу випадкової величини, що він описує? Що характеризують і як записуються ряд і багатокутник розподілу дискретної випадкової величини?
3. Що таке функція розподілу випадкової величини, як її можна представити для дискретної випадкової величини і для безперервної? Якими властивостями володіє функція розподілу випадкової величини? Як

можна знайти ймовірність влучення випадкової величини на інтервал своїх значень?

4. Які дії можна виконувати над випадковими величинами і як при цьому можна знайти ймовірності їх значень? Як знайти ймовірність значень випадкових величин при піднесенні їх до степеня, при підсумовуванні і при множенні?

5. Що таке математичне сподівання і дисперсія дискретної випадкової величини, яким може бути фізичний зміст цих понять, що вони характеризують?

6. Якими властивостями володіє математичне сподівання дискретних випадкових величин?

7. Як знайти математичне сподівання суми, добутку випадкових величин і математичне сподівання невипадкової величини?

8. Якими властивостями володіє дисперсія і середнє квадратичне відхилення дискретних випадкових величин?

9. Як можна знайти дисперсію суми, добутку випадкових величин і дисперсію невипадкової величини?

10. Як можна подати вираз дисперсії через математичне сподівання і через моменти випадкової величини?

11. Для яких цілей і за яких умов можна використовувати закон розподілу і формулу Пуассона? Запишіть формулу Пуассона.

12. Що таке нормована випадкова величина? Якою може бути розмірність у центрованій випадковій величині? Чому дорівнює математичне сподівання і дисперсія центрованої випадкової величини?

13. Для яких цілей може використовуватися локальна теорема Муавра – Лапласа?

14. Що таке рівень значущості, чому він може дорівнюватиме і для яких цілей використовується?

15. Чим відрізняється початковий момент випадкової величини від центрального моменту?

16. Що характеризує кореляційний момент (коваріація) і чому може дорівнюватиме його розмірність?

17. Якими властивостями володіє кореляційний момент? Що таке коефіцієнт кореляції, які властивості випадкових величин він відбиває?

18. У яких границях може змінюватися коефіцієнт кореляції залежних випадкових величин? Коли випадкові величини називаються некорельованими?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.

2. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. Київ: «Знання», КОО, 2000. 119 с.
3. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
5. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
6. Найко Д.А. Шевчук О.Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.
7. Швець, В.Т. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси: навч. посіб. Одеса, 2021. 234 с.
8. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.
9. Огірко О.І., Галайко Н.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Львів, 2017. 292 с.
10. Головня Р.М., Коваль В.О., Лущиков О.В. Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів: навч. посіб. Житомир: ЖДТУ, 2011. 140 с.
11. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Ф. К. Благодир, Л. А. Благодир, С. О. Рудницький. Умань : Сочінський М. М., 2021. 125 с.
12. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2 ч. Ч. І. Теорія ймовірностей. Київ: КНЕУ, 2000. 304 с.

ТЕМА 6. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Питання і завдання для самоперевірки

1. Дайте визначення поняттю "рівномірний закон розподілу" випадкової величини. У яких випадках використовується цей закон?

2. Запишіть основні характеристики рівномірного закону розподілу – функцію розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію і поясніть сенс використаних позначень.

3. Сформулюйте визначення поняття “показовий закон розподілу” випадкової величини. У яких випадках використовується цей закон?

4. Запишіть основні характеристики показового закону розподілу – функцію розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію і поясніть сенс використаних позначень.

5. Дайте визначення поняттю “нормальний закон розподілу” випадкової величини. У яких випадках використовується цей закон?

6. Запишіть основні характеристики нормального закону розподілу – функцію розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію і поясніть сенс використаних позначень.

7. Сформулюйте поняття “інтеграл ймовірності”, функція Лапласа.

8. Як знайти ймовірність влучення випадкової величини, що має нормальний закон розподілу, на інтервал своїх значень?

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
2. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. Київ: «Знання», КОО, 2000. 119 с.
3. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп’юка, 2003. 480 с.
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
5. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
6. Найко Д.А. Шевчук О.Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.
7. Швець, В.Т. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси: навч. посіб. Одеса, 2021. 234 с.
8. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.
9. Огірко О.І., Галайко Н.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Львів, 2017. 292 с.
10. Головня Р.М., Коваль В.О., Лущиков О.В. Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів: навч. посіб. Житомир: ЖДТУ, 2011. 140 с.

11. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Ф. К. Благодир, Л. А. Благодир, С. О. Рудницький. Умань : Сочінський М. М., 2021. 125 с.
12. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2 ч. Ч. І. Теорія ймовірностей. Київ: КНЕУ, 2000. 304 с.

ТЕМА 7. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Питання і завдання для самоперевірки

1. Поясніть основні елементи закону великих чисел – нерівність Чебишева і закон трьох сигм, а також закон розподілу суми випадкових величин.

2. Поясніть зміст поняття "*збігається за ймовірністю*" на прикладі ствердження теореми Чебишева, відповідно до якої при необмеженому збільшенні числа випробувань середнє арифметичне випадкової величини збігається за ймовірністю до її математичного сподівання.

3. Поясніть сенс вимог до статистичних оцінок параметрів: незсуненості, ефективності, обгрунтованості.

4. Що таке виправлена оцінка дисперсії випадкової величини?

5. Навіщо і як можна використовувати теорему Лапласа?

6. Поясніть значення понять: довірчий інтервал, довірча ймовірність, рівень значущості.

7. Як можна розрахувати значення довірчого інтервалу і довірчої ймовірності?

8. Як можна оцінити необхідний обсяг вибірки?

9. Що означає перевірка статистичних гіпотез?

10. У чому полягає критерій Пірсона і як він використовується при перевірці гіпотез?

11. Що називають вибірковим рівнянням прямої лінії регресії і як можна розрахувати коефіцієнти цього рівняння?

12. Для яких цілей використовується метод найменших квадратів? Поясніть порядок його застосування на прикладі лінійної апроксимації множини двовимірних точок.

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.

2. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. Київ: «Знання», КОО, 2000. 119 с.
3. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
5. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
6. Найко Д.А. Шевчук О.Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.
7. Швець, В.Т. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси: навч. посіб. Одеса, 2021. 234 с.
8. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.
9. Огірко О.І., Галайко Н.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Львів, 2017. 292 с.
10. Головня Р.М., Коваль В.О., Лущиков О.В. Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів: навч. посіб. Житомир: ЖДТУ, 2011. 140 с.
11. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Ф. К. Благодир, Л. А. Благодир, С. О. Рудницький. Умань : Сочінський М. М., 2021. 125 с.
12. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2 ч. Ч. І. Теорія ймовірностей. Київ: КНЕУ, 2000. 304 с.

ПЛАНИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ТЕМА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Законспектуйте в зошит та позберіть приклади:

Розглянемо три лінійно **залежних** вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$. Виявляється, що лінійно залежні вектори завжди **компланарні**, тобто знаходяться в одній або в паралельних площинах.

Дійсно, із лінійної залежності векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ випливає, що хоча б один із них, наприклад $\vec{a}_3$, є лінійною комбінацією інших, тобто:

$$\vec{a}_3 = k_1\,\vec{a}_1 + k_2\,\vec{a}_2.$$

Віднесемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ до одного початку і проведемо через ці вектори площину. Тоді вектори $k_1\,\vec{a}_1$ і $k_2\,\vec{a}_2$ будуть також знаходитися в цій площині. Отже, і сума векторів $k_1\,\vec{a}_1$ і $k_2\,\vec{a}_2$ буде знаходитися в цій же площині. Тому всі три лінійно залежних вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ – **компланарні**.

Виявляється, що умова компланарності векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ є не тільки необхідною, але і достатньою умовою їх лінійної залежності.

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ компланарні, то після переносу їх до спільного початку вони виявляться в одній площині (див. рис. 1.6, А). Далі, завжди можна підібрати такі коефіцієнти k_1 і k_2, при яких вектор $\vec{a}_3$ виявиться діагоналлю паралелограма (див. рис. 1.6, Б), у якому вектор $\vec{a}_3 = k_1\,\vec{a}_1 + k_2\,\vec{a}_2$, що дозволяє стверджувати про наявність лінійної залежності розглянутих векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$.

Отже, необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів у просторі $\boldsymbol{R}_3$ є їх компланарність.

Розглянемо питання про *покоординатну форму запису умови лінійної залежності векторів* у просторі $\boldsymbol{R}_n$.

Нехай задані *лінійно залежні* ***n***-вимірні вектори:

$$\vec{a}_1 = (\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{21}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n1});\ \vec{a}_2 = (\boldsymbol{a}_{12}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n2});\ \ldots;\ \vec{a}_m = (\boldsymbol{a}_{1m}, \boldsymbol{a}_{2m}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n\,m}).$$

Тоді існують деякі числа $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_m$, серед який є відмінні від нуля, але такі, для яких лінійна комбінація векторів дорівнюватиме нулю:

$$k_1\,\vec{a}_1 + k_2\,\vec{a}_2 + \ldots + k_m\,\vec{a}_m = 0.$$

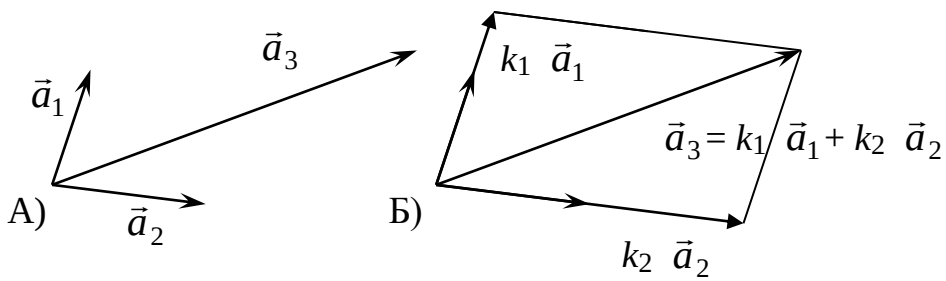

Рис. 1.6. Лінійна залежність компланарних векторів

Уявимо цю рівність у розгорнутому вигляді, записуючи, для зручності, вектори у вигляді векторів-стовпчиків:

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + k_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_ma_{1m} \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + \dots + k_ma_{2m} \\ \dots \\ k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \dots + k_ma_{nm} \end{pmatrix} = 0,$$

звідки випливає, що:

$$\left.\begin{array}{l} k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_ma_{1m} = 0, \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + \dots + k_ma_{2m} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \dots + k_ma_{nm} = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

Отже, питання про *лінійну залежність векторів* зводиться до питання: чи **існує** ненульове розв'язання системи рівнянь (1.2), тобто чи існує набір *чисел* $k_1, k_2, \dots, k_m$, серед який є відмінні від нуля, що задовольняють системі рівнянь (1.2)?

Отже, *якщо* в системи рівнянь (1.2) *існує ненульове розв'язання*, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ – лінійно ***залежні***, якщо ж у системи рівнянь (1.2) існує тільки нульове розв'язання: $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ – лінійно **незалежні**.

Приклади:

1. Досліджувати на лінійну залежність/незалежність вектори $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $\vec{u}_n = (0, 0, \dots, 1)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Розв'язання. Через очевидну рівність:

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 \dots + a_n\vec{u}_n,$$

система векторів $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{a}$ – лінійно залежна.

Нагадаємо, що в курсі шкільної математики для векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ використовувалися позначення $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Довільний вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ тривимірного простору (див. рис. 1.7) при необхідності записувався так : $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$.

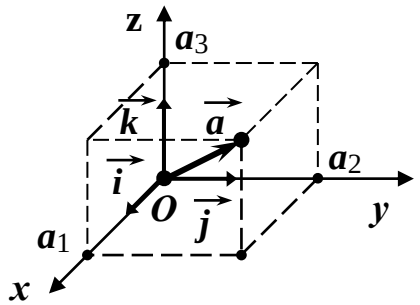

Рис. 1.7. Вектор у тривимірному просторі

2. Досліджувати на лінійну залежність/незалежність набір векторів $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, \ldots, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, \ldots, 1)$, …, $\vec{a}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.

Розв'язання. У даному випадку система рівнянь (1.2) має вигляд:

$$\begin{cases} k_1 & = 0, \\ k_1 + k_2 & = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 & = 0, \\ \ldots & \ldots \\ k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n & = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = 0, \\ k_3 = 0, \\ \ldots \\ k_n = 0. \end{cases}$$

Тобто $k_i = 0$, отже, вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ лінійно незалежні.

3. Довести, що якщо вектор $\vec{u}$ може бути поданий у вигляді лінійної комбінації лінійно *незалежних* векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$:

$$\vec{u} = k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \ldots + k_m \vec{a}_m,$$

то коефіцієнти $k_1, k_2, \ldots, k_m$ у цьому уявленні визначені однозначно.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто, що вектор $\vec{u}$ має два зображення:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m; \quad \vec{u} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_m \vec{a}_m.$$

Віднімаючи з першої рівності другу, одержимо:

$$\vec{u} - \vec{u} = (\alpha_1 - \beta_1)\, \vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, \vec{a}_2 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)\, \vec{a}_m = 0.$$

Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$ лінійно незалежні, тому їх лінійна комбінація дорівнюватиме нулю тільки за умови:

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0; \quad \ldots; \quad \alpha_m - \beta_m = 0,$$

звідки випливають шукані рівності:

$$\alpha_1 = \beta_1; \quad \alpha_2 = \beta_2; \quad \ldots; \quad \alpha_m = \beta_m.$$

Розкладанням вектора $\vec{u}$ на вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називається зображення вектора $\vec{u}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$:

$$\vec{u} = k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \ldots + k_m \vec{a}_m.$$

Коефіцієнти k_1, k_2, …, k_m у цьому зображенні визначені *однозначно*.

4. Знайти розкладання вектора $\vec{u} = (5, 2)$ на вектори $\vec{a}_1 = (-1, 2)$ і $\vec{a}_2 = (1, 1)$.

Розв'язання. Розкладання вектора $\vec{u}$ на вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ у даному випадку буде мати вигляд: $k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 = \vec{u}$. Для визначення значень коефіцієнтів розкладання k_1 і k_2 зрівняємо *однойменні координати* з лівої та правої частин даної рівності та одержимо систему рівнянь:

$$k_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix};\rightarrow\left.\begin{matrix}-k_1+k_2=5;\\2k_1+k_2=2;\end{matrix}\right\}\rightarrow k_1=-1;\ k_2=4\,;\rightarrow\vec{u}=-\vec{a}_1+4\vec{a}_2.$$

Приклади.

1. Знайти змішаний добуток векторів $\vec{a}=$ (3, 2, 1); $\vec{b}=$ (1, 2, 3); $\vec{c}=$ (4, 2, 2) і перевірити їх компланарність.

Розв'язання. На першому кроці знайдемо векторний добуток перших двох векторів, для чого використуємо мнемосхему обчислення векторного добутку (див. рис. 1.10):

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1\\1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}=(6-2,\ 1-9,\ 6-2)=(4,\ -8,\ 4).$$

Потім знайдемо $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left((4,\ -8,\ 4),(4,\ 2,\ 2)\right)\ =16-16+8=8$.

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарними не є.

2. Обчислити площу ($\boldsymbol{S_{\Delta\,ABC}}$) трикутника ***ABC***, якщо відомі координати його вершин: $\boldsymbol{A}(3,1,5)$, $\boldsymbol{B}(2,2,4)$ і $\boldsymbol{C}(0,-1,3)$.

Розв'язання. Площа трикутника дорівнює *половині* площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}=\left(-1,\ 1,-1\right)$ і $\overrightarrow{AC}=\left(-3,-2,-2\right)$.

Тоді, використовуючи властивості *векторного добутку*, шукану площу можна знайти як половину від модуля векторного добутку:

$$S_{\Delta\,ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|\,\vec{d}\,\right|.$$

Або, з огляду на мнемосхему розрахунку векторного добутку, знаходимо:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\-3 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2\end{bmatrix}=(-2-2,\ 3-2,\ 2+3)=(-4,\ 1,\ 5)=\vec{d}$$

,

$$\left|\,\vec{d}\,\right|=\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}=\sqrt{16+1+25}=\sqrt{42}\,.$$

Тоді шукана площа трикутника виявиться такою, яка дорівнює:

$$S_{\Delta\,ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{42}\,.$$

3. Обчислити об'єм ($\boldsymbol{V}_{\mathrm{ABCD}}$) піраміди ***ABCD***, якщо відомі координати її вершин: $\boldsymbol{A}(3,1,5)$, $\boldsymbol{B}(2,2,4)$, $\boldsymbol{C}(0,-1,3)$ і $\boldsymbol{D}(4,3,1)$. Тобто в основі піраміди знаходиться трикутник.

Розв'язання. Скористаємося відомим виразом об'єму піраміди і паралелепіпеда:

$$\boldsymbol{V}_{\text{прлп}} = \boldsymbol{S}_{\textbf{осн.}\,\square} \cdot \boldsymbol{h}; \qquad V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}\boldsymbol{\Delta}} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{прлп}},$$

звідки випливає, що об'єм ($\boldsymbol{V}_{\text{ABCD}}$) піраміди ***ABCD*** дорівнює одній шостій від об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,\ 1, -1),\ \ \overrightarrow{AC} = (-3,\ -2, -2),\ \text{ і }\ \overrightarrow{AD} = (1,\ 2, -4).$$

Для розрахунку об'єму паралелепіпеда ($\boldsymbol{V}_{\text{прлп}}$) скористаємося визначенням *змішаного* добутку і врахуємо той факт, що координати *векторного* добутку – вектора $\vec{d}$ = (–4, 1, 5) уже знайдені в попередньому прикладі. Одержимо:

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} = \left(\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right], \overrightarrow{AD}\right) = \left(\vec{d}, \overrightarrow{AD}\right) = -4 + 2 - 20 = -22;\ \ V_{\text{прлп}} = |-22|.$$

Тоді шуканий об'єм піраміди виявиться рівним:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{прлп}} = \frac{1}{6} \cdot |-22| = \frac{11}{3}.$$

Приклади.

1. Знайти кут між прямими лініями $2x - y + 5 = 0$; $3x + y - 2 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямих ліній у вигляді $y = 2x + 5$; $y = -3x + 2$. Виходить, $k_1 = 2$, а $k_2 = -3$ і, відповідно до формули (1.9), знаходимо:

$$tg\,\theta = \frac{-3-2}{1+3\cdot(-2)} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Отже, шуканий кут дорівнює: $\boldsymbol{\theta} = 45^{\circ}$.

2. Написати рівняння прямої лінії, що проходить через точку $\boldsymbol{A}(x_o, y_o)$ і є похилою до осі ***Ox*** під кутом φ_o.

Розв'язання. Рівняння прямої лінії будемо шукати у вигляді $y = k_o x + b$, де $k_o = \text{tg}\,\varphi_o$. Оскільки ця пряма має проходити через точку $\boldsymbol{A}(x_o, y_o)$,
то обов'язково виконується рівність $y = k_o x + b$, із якої знаходимо b:

$$b = y_o - k_o x_o.$$

Знайдене значення b підставимо в шукане рівняння

$$y = k_o x + y_o - k_o x_o$$

і запишемо його у вигляді:

$$y - y_o = k_o (x - x_o). \tag{1.10}$$

Рівнянням прямої лінії, що проходить через дану точку в даному напрямку, називається рівняння вигляду (1.10).

3. Написати рівняння прямої лінії, що проходить через точку $\boldsymbol{A}(1, 2)$ і похилої до осі ***Ox*** під кутом 135°.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт такої лінії дорівнює $k = \text{tg } 135^{o} = -1$. Отже, рівняння шуканої прямої лінії буде:

$$y - 2 = -1(x - 1) \quad \text{або} \quad x + y - 3 = 0.$$

4. Написати рівняння прямої лінії, що паралельна даній прямій лінії $2x - y + 5 = 0$ і проходить через точку $\boldsymbol{A}(1, 2)$.

Розв'язання. Шукана пряма лінія має бути паралельна прямій лінії $2x - y + 5 = 0$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює двом, то $k_o = 2$. Отже, рівняння (1.10) шуканої прямої лінії буде мати вигляд:

$$y - 2 = 2(x - 1) \quad \text{або} \quad 2x - y = 0.$$

5. Написати рівняння прямої лінії, яка перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OP}$ і яка проходить через точку $P(x_o, y_o)$ (див. рис. 1.21).

Розв'язання. Позначимо символом ρ довжину вектора $\overrightarrow{OP}$, і (див. рис. 1.21) символом α – кут, утворений вектором $\overrightarrow{OP}$ із позитивним напрямком осі $\boldsymbol{Ox}$. Тоді:

$$x_o = \rho \cdot \cos\alpha; \qquad y_o = \rho \cdot \sin\alpha; \qquad k_o = -\frac{1}{tg\alpha} = -\text{ctg}\,\alpha.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (1.10): $y - y_o = k_o(x - x_o)$, одержимо:

$$y - \rho\sin\alpha = -\text{ctg}\,\alpha\,(x - \rho\cos\alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(x - \rho\cos\alpha) = \frac{-x\cos\alpha + \rho\cos^2\alpha}{\sin\alpha},$$

звідки випливає, що $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$.

Беручи до уваги, що $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$, остаточно знаходимо:

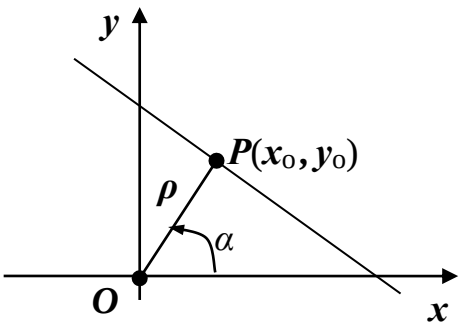

Рис. 1.21. Рівняння прямої лінії

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0. \qquad (1.11)$$

Нормальним рівнянням прямої лінії називається рівняння вигляду (1.11).

Відзначимо дві *особливості нормаль-ного рівняння прямої лінії*.

1) вільний член у рівнянні має бути зі знаком мінус, тому що відстань (від початку координат до прямої лінії) є величиною невід'ємною ($\rho \geq 0$);

2) сума квадратів коефіцієнтів при змінних x та y має дорівнювати одиниці:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1.$$

Можна виявити, що загальне рівняння прямої лінії $ax + by + c = 0$ легко приводиться до нормального вигляду шляхом множення на множник, що нормує:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

знак множника вибирається протилежним знаку $\boldsymbol{C}$ (тому що має виконуватися умова $\boldsymbol{\mu C} = -\boldsymbol{\rho} \le 0$). Якщо $\boldsymbol{C} = 0$, то знак можна брати будь-який.

6. Показати (самостійно), що відстань $d(\boldsymbol{A})$ від точки $\boldsymbol{A}(x_o, y_o)$, до прямої лінії $ax + by + c = 0$ можна обчислити за формулою:

$$d(A) = \left| \frac{ax_o + by_o + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

7. Знайти відстань точки $\boldsymbol{A}(1,2)$ від прямої лінії $4x - 3y + 10 = 0$.

Розв'язання. У даному випадку $\boldsymbol{\mu} = -1/5$. Тому:

$$d(A) = \left| \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 10}{-5} \right| = 4.$$

ТЕМА 2. МАТРИЦІ

Законспектуйте в зошит інформацію та роберіть її сутність:

Матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця з $m \times n$ чисел $\boldsymbol{a_{ij}}$,

i = $\overline{1,m}$, j = $\overline{1,n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right).$$

Числа $\boldsymbol{a_{ij}}$ називаються **елементами** матриці $\boldsymbol{A}$, де i – номер рядка, а j – номер стовпця, в яких стоїть елемент $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Якщо $\boldsymbol{m = n}$, то матриця $\boldsymbol{A}$ називається **квадратною матрицею порядку** $\boldsymbol{n}$, а елементи $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}}$ складають головну діагональ.

Квадратна матриця, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, називається **одиничною матрицею** і позначається через $\boldsymbol{E}$.

Сумою матриць $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ **і** $\boldsymbol{B = (в_{ij})}$ розміру**mxn** називається матриця $\boldsymbol{C = (c_{ij})}$ того ж розміру така, що

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Позначення $\boldsymbol{C = A + B}$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ **на число α** називається матриця $C = (c_{ij})$ того ж розміру така, що

$c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Позначення $C = \alpha A$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ на **матрицю** $B = (b_{ij})$ розміру $n \times k$ називається матриця $C = (c_{ij})$ розміру $m \times k$ така, що

$$c_{ij} = \sum_{e=1}^{n} a_{ie} b_{ej} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj},$$

$i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$

Позначення: $C = A\,B$.

Зауваження 1. В загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то матриці A і B називаються **переставними**.

Лінійним перетворенням величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в величини $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ називається перетворення виду

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n; \end{cases}$$

або скорочено

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad \mathbf{i} = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

де a_{ij} – задані числа.

Матриця $A = (a_{ij})$, складена із коефіцієнтів лінійного перетворення, називається **матрицею лінійного перетворення.**

Введемо матриці розміру $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Тоді лінійне перетворення можна записати в матричній формі

$X' = AX$.

Поряд з лінійним перетворенням (1) розглянемо лінійне перетворення величин $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ в величини $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$:

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j', \quad i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Потрібно засобами матричного числення знайти лінійне перетворення, яке виражає $x_1'', x_2'', ..., x_n''$ через x_1, x_2, ... x_n.

Запишемо лінійне перетворення (2) також в матричній формі

$$X'' = BX', \text{ де } B = (b_{ij}), \quad X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n'' \end{pmatrix},$$

тоді

$$X'' = BX' = B \cdot (AX) = (BA) \cdot X.$$

Отже, шукане лінійне перетворення має матрицю $C = BA$.

Визначником n-го порядку, що відповідає квадратній матриці А порядку n, називається число, яке знаходиться за певним правилом і позначається $|A|$ або **det*A***. У випадку $n = 2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

У випадку $n = 3$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \tag{3}$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Нехай маємо визначник n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник (n-1)-го порядку, одержаний з визначника Δ викресленням і-го рядка і j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента називається його мінор, взятий із знаком

$(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Обернена матриця

Матриця B називається **оберненою** до матриці A, якщо

$$AB = BA = E.$$

Позначення: $B = A^{-1}$

Обернена матриця A^{-1} до A **існує тоді і лише тоді,** коли $|A| \neq 0.$ Має місце формула

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Законспектуйте в зошит та розіберіть приклади:

Приклад 1. Дано два лінійні перетворення

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' + x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_2' - 4x_3' \end{cases}$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, яке виражає x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Розв'язання

Введемо відповідні матриці лінійних перетворень:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю С шуканого лінійного перетворення

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

і шукане перетворення має вигляд:

$$\begin{cases} x_1'' = 8x_1 + x_2 + 4x_3, \\ x_2'' = 7x_1 + 4x_2, \\ x_3'' = -4x_1 - 3x_2 + 11x_3. \end{cases}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю обернену до даної

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Переконаємось, що $|A|\neq 0.$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 4\end{vmatrix}=0+18+0-0-16-0=2\neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij}, i=1,2,3; j=1,2,3.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}=0,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6.$$

Аналогічно знайдемо: A_{12}=1, A_{22}=1, A_{32}= -1,
A_{13}=0, A_{23}=6, A_{33}= -4.

Отже,

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -8 & 6\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 3\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Формули Крамера

Якщо $|A|\neq 0$, то розв'язок системи (4) може бути знайдений за **формулами Крамера**:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\qquad i=\overline{1,n},\ \text{де}\ \Delta=|A|, \tag{4}$$

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1i-1}b_1a_{1i+1}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\ldots a_{2i-1}b_2a_{2i+1}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\ldots a_{ni-1}b_na_{ni+1}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Приклад 3. За формулами Крамера розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\ 2x_1-x_2+x_3=3,\\ x_1-x_2+2x_3=5.\end{cases}$$

Розв'язання

Згідно з формулою (4) обчислимо Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-5,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Отже, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3.$

ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Законспектуйте в зошит та розіберіть приклади:

Приклад. Знайти область визначення функції $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

Розв'язання. Розрахунок значень цієї функції потребує обчислення значень кореня квадратного $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$, що можливо в тому випадку, коли підкореневий вираз невід'ємний, тобто коли $(x^2 - 3x + 2) \geq 0$. Крім того, знаменник дробу не повинен дорівнювати нулю. Отже, область визначення функції буде задаватися умовою:

$$(x^2 - 3x + 2) > 0.$$

Корені рівняння $(x^2 - 3x + 2) = 0$ відповідно дорівнюють ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$), тому нерівність $(x^2 - 3x + 2) > 0$ буде виконуватися при ($x < 1$) або при ($x > 2$).

Отже, областю визначення функції буде об'єднання двох інтервалів:

$$(-\infty, 1) \text{ і } (2, +\infty), \text{ тобто } x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

Приклади. Розглянемо типові варіанти відшукання границь.

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2x+1}{3x+1} \right)$. У даному випадку границі чисельника і знаменника існують, причому границя знаменника відмінна від нуля. Тому:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2x+1}{3x+1} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (2x+1)}{\lim\limits_{x \to 2} (3x+1)} = \frac{2 \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x) + \lim\limits_{x \to 2} (1)}{3 \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x) + \lim\limits_{x \to 2} (1)} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{5}{7};$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2-x-2}{x^3+2x+3}\right)$. Аналогічно розглянутому прикладу знаходимо:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^2-x-2}{x^3+2x+3}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-x-2\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+2x+3\right)}=\frac{0}{6}=0;$$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^3-1}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Врахуємо відомі рівності:

$x^2-1=(x-1)(x+1)$; $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, тоді:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x^3-1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)=\frac{2}{3};$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. При $x\to 0$, $\sin x\to x$, тому:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 5x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{5x}\right)=\frac{2}{5};$$

5) Знайти границю, яка далі знадобиться для виведення формули Пуассона (п. 3.2.9), що дозволяє будувати моделі випадкових процесів обслуговування для великого класу систем мікроекономіки, у яких прибуток виникає в результаті обслуговування потоків клієнтів:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^x=(1)^\infty.$$

Для розкриття невизначеності виду $(1)^\infty$ використаємо другу виняткову границю (при $x/\lambda=t$; $\lambda/x=1/t$), одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^{x\cdot\left(\frac{-\lambda}{-\lambda}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^{-\frac{x}{\lambda}(-\lambda)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{x}\right)^{-\frac{x}{\lambda}}\right]^{-\lambda}=e^{-\lambda}.$$

Приклади. Дослідити на безперервність такі функції.

1. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$. *Розв'язання.* Чисельник і знаменник дробу безперервні на всій числовій осі. Коренями знаменника є значення $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$. У цих точках знаменник обертається в нуль, тоді дані точки є точками розриву функції $f(x)$. У точці $x_1 = 1$ знаходимо:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+3)}{(x-2)}\right)=-4.$$

Тобто в точці $x_1 = 1$ значення функції не існує, одночасно $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$. Отже, у точці $x_1 = 1$ функція має усувний розрив.

У точці $x_2 = 2$ знаходимо:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+3)}{(x-2)}\right)=\left(\frac{5}{0}\right)=\infty.$$

Отже, у точці $x_2 = 2$ границя функції *не існує*, тому в точці $x_2 = 2$ функція має *розрив другого роду*.

Відповідь. Функція безперервна на всій числовій осі, за винятком точок $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$. У точці $x_1 = 1$ у функції усувний розрив. У точці $x_2 = 2$ функція має розрив другого роду.

2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$. *Розв'язання*. Чисельник дробу є безперервною функцією на всій числовій осі. Знаменник дробу є безперервною функцією на всій числовій осі, за винятком точки $x = 0$. Отже, при всіх $x \neq 0$ функція безперервна, а при $x = 0$ функція зазнає розрив.

При $x \to -0$ величина $\dfrac{1}{x}\to-\infty$, тому $2^{\frac{1}{x}}\to 2^{-\infty}\to\dfrac{1}{2^{+\infty}}\to 0$. Отже, $f(-0) = 1$.

При $x \to +0$ величина $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, тому $2^{\frac{1}{x}}\to 2^{+\infty}\to+\infty$. Отже, $f(+0) = 0$.

Відповідь. У точці $x = 0$ однобічні границі функції існують **[** $f(-0) = 1$, $f(+0) = 0$ **]**, але *не рівні* між собою: $f(-0) \neq f(+0)$. Тому точка $x = 0$ є *точкою розриву* **першого** *роду*. *Стрибок функції* в точці $x = 0$ дорівнює:

$$f(+0) - f(-0) = 0 - 1 = -1.$$

ТЕМА 4. ІНТЕГРАЛ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І РЯДИ

Законспектуйте в зошит та розіберіть приклади:

Приклади. Розглянемо типові приклади на використання методів інтегрування. Необхідно знайти такі інтеграли і перевірити результат шляхом диференціювання:

1) $\int\left(x^3-2x^2+1\right)dx$. *Розв'язання*. Скориставшись властивостями 3 і 4
невизначеного інтеграла і формулою 1 табл. 2.5, одержимо:

$$\int\left(x^3-2x^2+1\right)dx=\int x^3\,dx-2\int x^2\,dx+\int dx=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+x+C.$$

Виконуючи диференціювання, одержуємо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+x+C\right)'=\frac{4x^3}{4}-2\frac{3x^2}{3}+1=x^3-2x^2+1;$$

Таблиця 2.5

Таблиця формул основних інтегралів

1	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	8	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctg\,x+C$
2	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	9	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
3	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$	10	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\,x+C$
4	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$	11	$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+C$
5	$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$	12	$\int\mathrm{tg}\,x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
6	$\int e^x dx=e^x+C$	13	$\int\mathrm{ctg}\,x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$
7	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C$	14	$\int U\,dV=UV-\int V\,dU$

2) $\int tg\,(3x+1)\,d\,x$. *Розв'язання.* Скориставшись властивістю 5 невизначеного інтеграла і формулою 12 табл. 2.5, одержимо:

$$\int tg\,(3x+1)\,d\,x = \frac{-1}{3}\cdot \ln|\cos(3x+1)| + C.$$

Виконуючи зворотне перетворення шляхом диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\frac{-1}{3}\cdot \ln|\cos(3x+1)| + C\right)' = \frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{\cos(3x+1)}\cdot\left(-\sin(3x+1)\right)\cdot 3 = tg\,(3x+1);$$

3) $\int \frac{x\,d\,x}{x^2-4}$. *Розв'язання.* Скориставшись властивістю 4 невизначеного інтеграла, другим варіантом підстановки і формулою 11 табл. 2.5, одержимо:

$$\int\frac{x\,d\,x}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int\frac{2x\,d\,x}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int\frac{d\,(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int\frac{d\,\psi}{\psi} = \frac{1}{2}\ln|\psi| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-4}\cdot 2x = \frac{x}{x^2-4};$$

4) $\int\frac{2x+3}{x^2+1}\,d\,x$. *Розв'язання.* Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми двох доданків, потім інтегруємо за формулами 10 і 11 табл. 2.5, одержимо:

$$\int\frac{2x+3}{x^2+1}\,d\,x = \int\frac{2x}{x^2+1}\,d\,x + 3\int\frac{1}{x^2+1}\,d\,x = \int\frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1} + 3\,\mathrm{arctg}\,x =$$

$$= \ln(x^2+1) + 3\,\mathrm{arctg}\,x.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\ln(x^2+1) + 3\,\mathrm{arctg}\,x\right)' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + 3\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{2x+3}{x^2+1};$$

5) $\int\frac{\cos x\,d\,x}{\sqrt{\sin x}}$. *Розв'язання.* Зробимо заміну змінних, уважаючи, що $t = \sin x$. Тоді вираз для $dt = \cos x\,\mathrm{d}x$ буде збігатися з чисельником дробу у

підін-тегральному виразі, потім інтегруємо за формулою 1 табл. 2.5, одержимо:

$$\int \frac{\cos x\, d\, x}{\sqrt{\sin x}} = \int \frac{d\, t}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\, d\, t = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\sin x} + C.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(2\sqrt{\sin x} + C\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}};$$

6) $\int xe^x\, d\, x$. *Розв'язання.* Скористаємося формулою інтегрування частинами: $\int U\, dV = UV - \int V\, dU$. Покладемо $U = x$ і $dV = e^x\, dx$, тоді:

$$V = \int dV = \int e^x dx = e^x \quad \text{і} \quad U\, V = x\, e^x, \qquad dU = dx\,.$$

Далі підставимо отримані вирази у формулу інтегрування частинами:

$$\int xe^x\, d\, x = xe^x - \int e^x\, d\, x = xe^x - e^x + C\,.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(xe^x - e^x + C\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x\,.$$

Збіг даного результату з підінтегральною функцією дозволяє стверджувати, що задача розв'язана правильно.

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 5\right) dx$.

Розв'язання. Застосувавши формулу Ньютона – Лейбніца, одержимо:

$$\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 5\right) dx = \left(x^4 - x^3 + 5x\right)\Big|_1^2 = \left(2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2\right) - \left(1^4 - 1^3 + 5 \cdot 1\right) =$$

$$= (16 - 8 + 10) - (1 - 1 + 5) = 18 - 5 = 13;$$

2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, d\, x}{\sin^3 x}$. *Розв'язання.* Зробимо заміну змінної, поклавши $t = \sin x$.

Тоді:
$dt = \cos x\, dx$; при $x = \pi/6$, $t = \sin(\pi/6) = 1/2$; при $x = \pi/2$, $t = \sin(\pi/2) = 1$. Отже,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, d\,x}{\sin^3 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{d\,t}{t^3} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{-3} d\,t = \frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{-1}{2\,t^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{-1}{2} + 2 = 1{,}5\,;$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, d\,x$. *Розв'язання.* Скористаємося формулою інтегрування частинами $\int U\, dV = UV - \int V\, dU$, поклавши $U = x$, $dV = \sin x\, dx$.

Тоді, з урахуванням рівності $\cos(\pi/2) = 0$, послідовно знаходимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx = \left| \begin{array}{l} U = x \\ dV = \sin x dx \\ dU = dx \\ V = -\cos x \end{array} \right| = x(-\cos x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

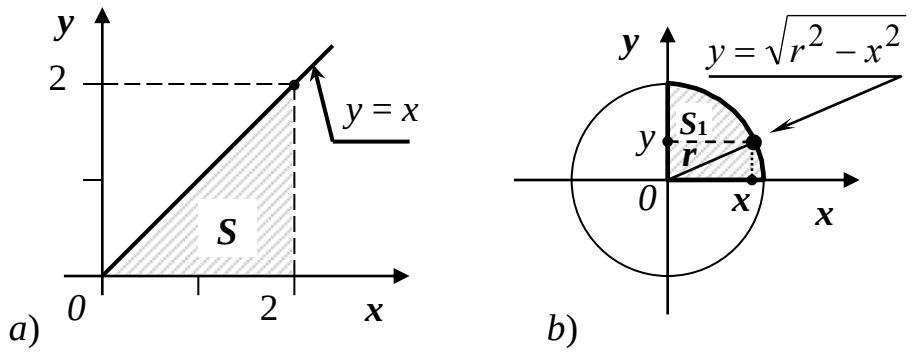

Рис. 2.20. Обчислення площі геометричних фігур:
a) трикутника; *b*) кола

Приклад. Використовуючи поняття визначеного інтеграла, знайти площу прямокутного трикутника, заданого рівнянням $y = x$, для $x \in [0;2]$.

Розв'язання. Наведемо умову задачі у вигляді рис. 2.20 *a*. Тоді шукану площу трикутника можна знайти з використанням формули Ньютона –Лейбніца:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2\ .$$

Приклад. Знайти площу ***S*** кола радіуса ***r***.

Розв'язання. Із цією метою скористаємося залежністю $y(x)=\sqrt{r^2-x^2}$

і знайдемо площу $\boldsymbol{S}_1$ (див. рис. 2.20 *b*) однієї чверті кола, використовуючи заміну змінної: $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$; при $x = 0 \to t = 0$; при $x = r \to t = \pi/2$. Одночасно врахуємо, що $\cos^2 t = (1+\cos 2t)/2$. Одержимо:

$$S_1=\int_0^r y(x)\,dx=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=r^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=r^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi\cdot r^2}{4};\qquad S=4\cdot S_1=\pi\cdot r^2.$$

ТЕМА 5. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Законспектуйте в зошит та розіберіть приклади:

Приклади.

1. При $\boldsymbol{n}=2$ позначимо елементи сукупності цифрами 1 і 2. Тоді з двох елементів можна одержати дві перестановки ($P_2.=2$): 12 і 21.

За формулою знаходимо: $\boldsymbol{P}_2 = 2! = 1\cdot 2 = 2.$

2. При $\boldsymbol{n}=3$ позначимо елементи сукупності цифрами 1, 2 і 3. Тоді з трьох елементів можна одержати шість перестановок ($P_3.=6$): 123, 213, 312, 132, 321, 231.

За формулою знаходимо: $\boldsymbol{P}_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$

Розміщеннями з ***n*** елементів по ***m*** елементів називають різні сукупності ***m*** елементів із цих ***n*** елементів, які (сукупності) відрізняються один від іншого *або* самими *елементами*, або *послідовністю* розташування елементів.

Кількість усіх різних розміщень із ***n*** різних елементів по ***m*** елементів позначається так: A_n^m.

У загальному випадку кількість (A_n^m) усіх розміщень із ***n*** різних елементів по ***m*** обчислюється (див. додаток 3) за формулою множників:

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...(n-m+1)}_{m \text{ множників}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклади.

1. При $\boldsymbol{n} = 2$ позначимо елементи сукупності цифрами 1 і 2. Тоді з двох елементів по одному елементу можна одержати ($\boldsymbol{A}_2^1 = 2$) два розміщення:
1 і 2; по два елементи одержимо ($\boldsymbol{A}_2^2 = 2$) два розміщення: 12 і 21.

2. При $\boldsymbol{n}$ = 3 позначимо елементи сукупності цифрами 1, 2 і 3. Тоді з трьох елементів по одному елементу можна одержати ($\boldsymbol{A}_3^1 = 3$) три розміщення: 1, 2 і 3, по два елемени одержимо ($\boldsymbol{A}_3^2 = 6$) шість розміщень: 12, 21, 13, 31, 23, 32.

Приклади.

1. Студенти групи складають у сесію екзамени з п'яти курсів, які умовно позначимо буквами: ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E***. Скількома способами можна встановити послідовність складання випробувань у розкладі?

Розв'язання. У сесію потрібно скласти всі іспити, тому будь-який варіант розкладу буде відрізнятися один від одного тільки порядком проходження випробувань. Тому кількість варіантів розкладу буде збігатися з числом можливих перестановок ($\boldsymbol{P}_5$), що знайдемо за формулою:

$$\boldsymbol{P}_5 = \boldsymbol{n}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

2. Студенти вивчають вісім предметів. Щодня в них по три пари різних занять. Скількома способами може бути складений розклад занять на один день?

Розв'язання. Розклад на один день може відрізнятися один від одного або самими предметами, або порядком їх розташування. Тому загальна кількість варіантів побудови трьох пар предметів дорівнюватиме кількості розміщень ($\boldsymbol{A}_8^3$) із восьми предметів на трьох і може бути розрахована за формулою:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

3. Із шести спецкурсів студент зобов'язаний скласти екзамени з трьох спецкурсів, які він вибирає на свій розсуд. Скільки різних варіантів вибору має студент?

Розв'язання. Так як кожний варіант вибору відрізняється один від одного хоча б одним елементом, тому кількість варіантів дорівнюватиме кількості сполучень $\boldsymbol{C}_6^3$:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Приклад. Якщо подія (***A***) полягає у випаданні парного числа очок при киданні гральної кістки, то йому сприятливі $\boldsymbol{m} = 3$ випадків випадання числа очок, а саме – 2, 4, 6 очок із усіх $\boldsymbol{n} = 6$ випадків.

Ймовірність події *A* *у схемі випадків* позначається $P(\boldsymbol{A})$ і обчислюється як відношення числа *сприятливих* випадків $\boldsymbol{m}$ до *загального* числа $\boldsymbol{n}$ випадків:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання. Яка ймовірність (події ***B***) того, що він набрав потрібні цифри?

Розв'язання. Число різних за складом або послідовністю набору пар цифр не менше за число розміщень із 10 елементів за двома, що складає загальне число елементарних випадків $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}_{10}^2 = 9 \cdot 10 = 90$, із яких лише один набір (один випадок) є сприятливим. Тому шукана *апріорна* (*доспробна*) ймовірність події ***B*** буде дорівнюватиме $P(\boldsymbol{B}) < 1/90$ (див. $P(\boldsymbol{B})=0{,}01$). Відзначимо, що не врахованими залишилися десять пар однакових чисел: 00, 11, 22, ..., 99. Тому загальне число $\boldsymbol{n}$ дорівнюватиме 100 і $P(\boldsymbol{B}) = 1/100$.

Приклад. Обчислити ймовірність того, що володар однієї картки спортлото угадає шість (подія ***A***) виграшних номерів із 49.

Розв'язання. Для угадування всіх шести виграшних номерів сприятливим є тільки один випадок ($\boldsymbol{m} = 1$), а загальне число випадків дорівнює числу сполучень із 49 по 6:

$$n = C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10068347520}{720} = 13983816.$$

Тоді шукана ймовірність дорівнюватиме $P(\boldsymbol{A}) = 1/\boldsymbol{n} = 0{,}000\,000\,072$.

Приклади.

1. Спроба складається в киданні двох монет, розглядаються події:

A – поява герба на першій монеті;

B – поява герба на другій монеті.

У даному випадку ймовірність події ***A*** не залежить від того, відбулася подія ***B*** або ні, тобто подія ***A*** незалежна від події ***B***.

2. В урні дві білих кулі і одна чорна. Дві людини витягають по одній кулі з цієї урни, розглядаються події:

A – поява білої кулі у першої особи;

B – поява білої кулі у другої особи.

Початкова ймовірність події ***B*** дорівнює 2/3. Проте якщо стало відомо, що подія ***A*** відбулася, то ймовірність події ***B*** дорівнює 1/2.

Умовною ймовірністю події ***B*** називають ймовірність події ***B***, обчислену за умови, що інша подія – ***A*** відбулася. Умовна ймовірність події ***B*** позначається так: $P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A})$.

Для умов останнього прикладу $P(\boldsymbol{B}) = 2/3$; $P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}) = 1/2$.

Умова незалежності події $\boldsymbol{B}$ від події $\boldsymbol{A}$ має вигляд:

$$P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{B}).$$

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку двох подій ($\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$), тобто такої події, яка полягає в одночасній появі *і* першої події ($\boldsymbol{A}$) *і* другої події ($\boldsymbol{B}$), дорівнює *добутку* ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія відбулася:

$$P(\boldsymbol{AB}) = P(\boldsymbol{A}) \cdot P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}), \qquad P(\boldsymbol{AB}) = P(\boldsymbol{B}) \cdot P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}). \qquad (3.1)$$

Для умов останнього прикладу ймовірність $P(\boldsymbol{AB})$ того, що обидві особи витягнуть з урни по однієї білій кулі, знайдемо:

$$P(\boldsymbol{AB}) = P(\boldsymbol{A}) \cdot P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3.$$

Висновок 1. Якщо подія $\boldsymbol{B}$ не залежить від події $\boldsymbol{A}$, то і подія $\boldsymbol{A}$ не залежить від події $\boldsymbol{B}$, тобто *залежність* або незалежність подій *завжди взаємна*. Для доведення цього твердження достатньо записати формулу (3.1) двома способами:

$$P(\boldsymbol{AB}) = P(\boldsymbol{A}) \cdot P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{B}) \cdot P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}).$$

Якщо подія $\boldsymbol{B}$ незалежна, то, підставивши в ліву частину рівність $P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}) = P(\boldsymbol{B})$, знаходимо:

$$P(\boldsymbol{A})\, \cancel{P(\boldsymbol{B})} = \cancel{P(\boldsymbol{B})} \cdot P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}), \quad \rightarrow \quad P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) = P(\boldsymbol{A}).$$

Отже, подія $\boldsymbol{A}$ також не залежить від події $\boldsymbol{B}$.

Висновок 2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(\boldsymbol{AB}) = P(\boldsymbol{A}) \cdot P(\boldsymbol{B}).$$

Для випадку декількох ($\boldsymbol{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}$) залежних подій формула (3.1) набуде вигляду:

$$P(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n) = P(\boldsymbol{A}_1) \cdot P(\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{A}_1) \cdot P(\boldsymbol{A}_3/\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\boldsymbol{A}_n/\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_{n-1})\ldots$$

На закінчення відзначимо просте мнемонічне правило визначення ймовірності складної події, що є в появі більш простих несумісних подій.

ТЕМА 6. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Законспектуйте в зошит та розіберіть приклади:

Приклад. Монета підкидається два рази. Випадкова величина ξ – кіль-кість гербів, що випали. Потрібно:

1) скласти закон розподілу випадкової величини ξ і багатокутник розподілу;

2) знайти функцію розподілу і побудувати її графік;

3) обчислити ймовірність того, що випадкова величина ξ виявиться на інтервалі [0,5; 3].

Розв'язання.

1. Дискретна випадкова величина ξ – кількість гербів, що випали, може приймати три значення: $x_1 = 0$ – випало рівно нуль гербів, $x_2 = 1$ – випав один герб, $x_3 = 2$ – герб випав два рази. Ймовірності цих значень обчислимо за формулою Бернуллі: $P_n(\boldsymbol{k}) = C_n^{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{q}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}$.

У даному випадку число спроб $\boldsymbol{n} = 2$; $\boldsymbol{p} = 0{,}5$; $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p} = 0{,}5$. Тоді:

$P(x = 0) = P_2(0) = C_2^0 \cdot \boldsymbol{p}^0 \cdot \boldsymbol{q}^{(2-0)} = 0{,}5^2 = 0{,}25;$
$P(x = 1) = P_2(1) = C_2^1 \cdot \boldsymbol{p}^1 \cdot \boldsymbol{q}^{(2-1)} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5;$
$P(x = 2) = P_2(2) = C_2^2 \cdot \boldsymbol{p}^2 \cdot \boldsymbol{q}^{(2-2)} = 1 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 = 0{,}25.$

Запишемо закон розподілу випадкової величини (див. табл. 3.5):

Таблиця 3.5

x_i	0	1	2
$\boldsymbol{p}_i$	0,25	0,5	0,25

Контроль обчислень виконаємо шляхом перевірки виконання умови нормування ймовірностей (див. формулу (3.6)):

$$\sum_i p_i = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1.$$

Багатокутник розподілу (див. рис. 3.4, А) будуємо за даними табл. 3.5.

2. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини ξ:

$F(x = 0) = \mathrm{P}(\xi < 0) = 0;$
$F(x = 1) = \mathrm{P}(\xi < 1) = P(x = 0) = 0{,}25;$
$F(x = 2) = \mathrm{P}(\xi < 2) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0{,}75;$
$F(x > 2) = \mathrm{P}(\xi < 2 + 0) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 1.$

Будуємо графік функції розподілу $F(x)$ (див. рис. 3.4, Б).

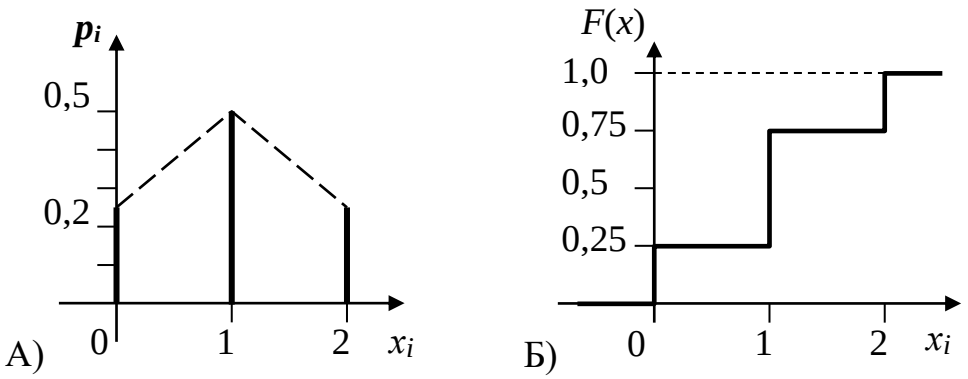

Рис. 3.4. Розподіл випадкової величини:
А) багатокутник (див. табл. 3.5); Б) функція

3. Ймовірність того, що випадкова величина виявиться на інтервалі [0,5; 3), обчисляємо за формулою: $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$.

У даному випадку $a = 0{,}5$; $b = 3$, тоді одержуємо:

$$P(0{,}5 \le \xi < 3) = F(3) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Приклад. Безперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ a(x-1)^2 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) щільність розподілу ймовірностей $f(x)$; 3) ймовірність влучення випадкової величини на інтервал [1,5; 2,5].

Розв'язання.

1. Функція розподілу безперервної випадкової величини повинна бути безперервною. Вибираємо параметр a так, щоб у точках $x = 1$ і $x = 2$ функція $F(x)$ була безперервною (в усіх інших точках числової осі функція $F(x)$ безперервна).

Функція $F(x)$ безперервна в точці x_0, якщо односторонні границі функції дорівнюють її значенню в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Розглянемо точку $x = 1$. Умова безперервності функції в цій точці має вигляд: $a(1-1)^2 = 0$ і виконується при всіх значеннях параметра a.

Розглянемо точку $x = 2$. Умова безперервності функції в цій точці виглядає як $a(2-1)^2 = 1$, звідки знаходимо значення параметра $a = 1$.

Отже, функція розподілу буде мати вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

2. Щільність розподілу $f(x)$ дорівнює першій похідній від функції роз-поділу, тобто:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 2(x-1) & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Відзначимо, що в точці $x = 2$ похідна не існує.

3. Ймовірність влучення випадкової величини на інтервал [1,5; 2,5] знаходимо, використовуючи властивість функції розподілу:

$$P(a < \eta < b) = F(b) - F(a)\ .$$

У даному випадку $a = 1{,}5$; $b = 2{,}5$. Тоді:

$$P(1{,}5 < \eta < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = 1 - (1{,}5-1)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Приклад. Знайти математичне сподівання, дисперсію і СКВ випадкової величини v – числа появ події $\boldsymbol{A}$ у $\boldsymbol{n}$ незалежних спробах, якщо ймовірність його появи в одній спробі дорівнює $\boldsymbol{p}$ (ймовірність непояви $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p}$).

Розв'язання. Раніше було встановлено, що для випадкової величини ξ – числа появ події $\boldsymbol{A}$ в *одній* спробі – математичне сподівання і дисперсія дорівнюють:

$$\boldsymbol{m}_\xi = p, \qquad D_\xi = p \cdot q.$$

У даному прикладі випадкова величина v дорівнює сумі $\boldsymbol{n}$ незалежних випадкових величин ξ_i:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ .$$

Спроби *незалежні*, тому *математичне сподівання* суми $\boldsymbol{n}$ випадкових величин ξ_i дорівнюватиме сумі їх математичних сподівань:

$$M\left[v\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M\left[\xi_i\right] = n \cdot M\left[\xi\right] = n \cdot m_\xi = n \cdot p\ .$$

Аналогічно визначаємо *дисперсію* випадкової величини v:

$$D\left[v\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D\left[\xi_i\right] = n \cdot D_\xi = n\,p\,q\ .$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини v знаходимо за формулою:

$$\sigma[v] = \sqrt{D[v]} = \sqrt{npq}\ .$$

Отже, математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення випадкової величини v – числа появ події $\boldsymbol{A}$ у $\boldsymbol{n}$ незалежних спробах виявляються рівними

$$\boldsymbol{m}_v = n\,p; \qquad D_v = n\,p\,q; \qquad \sigma[v] = \sqrt{npq}\,,$$

де $\boldsymbol{p}$ – ймовірність появи події $\boldsymbol{A}$ в одній спробі;

$\boldsymbol{q} = (1 - \boldsymbol{p})$ – ймовірність *непояви* події $\boldsymbol{A}$ в одній спробі.

Приклад. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, заданої законом розподілу (див. табл. 3.8):

Таблиця 3.8

xi	–2	0	1
$\boldsymbol{p_i}$	0,2	0,3	0,5

Розв'язання. Математичне сподівання обчисляємо за формулою:

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i, \quad M[\xi] = -2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 = -0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}1.$$

Для обчислення дисперсії скористаємося властивістю:

$$D_\xi = \mathrm{M}[\xi^2] - \boldsymbol{m}_\xi{}^2.$$

Із цією метою попередньо знайдемо $M[\xi^2]$:

$$M[\xi^2] = (-2)^2 \cdot 0{,}2 + (0)^2 \cdot 0{,}3 + (1)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}3.$$

Тоді дисперсія знайдеться:

$$D_\xi = M[\xi^2] - \boldsymbol{m}_\xi{}^2 = 1{,}3 - (0{,}1)^2 = 1{,}29.$$

Середнє квадратичне відхилення обчисляємо за формулою:

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{1{,}29} = 1{,}14.$$

ТЕМА 7. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Законспектуйте в зошит та розіберіть приклади:

Приклад. Знайти і побудувати емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

i	1	2	3
x_i	1	4	7
$\boldsymbol{n}_i$	5	20	25

Розв'язання.

1. Знаходимо обсяг вибірки: $\boldsymbol{n} = \Sigma\, \boldsymbol{n}_i = 5 + 20 + 25 = 50$.

2. Для кожного варіанту x_i обчисляємо відносну частоту за формулою: $\boldsymbol{n}_i^* = \boldsymbol{n}_i / \boldsymbol{n}$ і результат заносимо в таблицю:

i	1	2	3
x_i	1	4	7
$\boldsymbol{n}_i^*$	0,1	0,4	0,5

Контроль обчислень виконуємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів, тоді одержимо: $\Sigma\, \boldsymbol{n}_i^* = 1$.

3. Знаходимо емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$:

якщо $x \le x_1 = 1$, то $F_n(x) = 0$;

якщо $x_1 < x \le x_2$, тобто $1 < x \le 4$, то $F_n(x) = \boldsymbol{n}_1{}^* = 0{,}1$;

якщо $x_2 < x \le x_3$, тобто $4 < x \le 7$, то $F_n(x) = \boldsymbol{n}_1^* + \boldsymbol{n}_2^* = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$;
якщо $x > x_3$, тобто $x > 7$, то $F_n(x) = \boldsymbol{n}_1^* + \boldsymbol{n}_2^* + \boldsymbol{n}_3^* = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1$.
Отже, одержимо:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}1 & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при } 4 < x \le 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

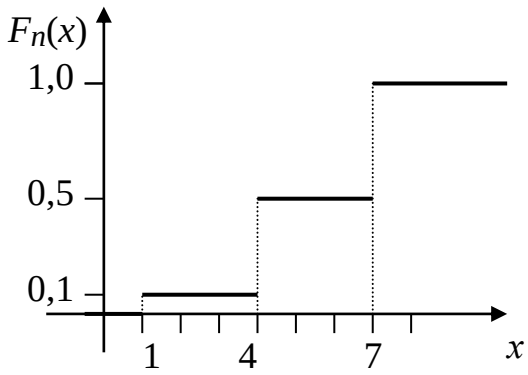

Рис. 4.6. Емпірична функція розподілу

Використовуючи отримані значення функції розподілу $F_n(x)$, будуємо графік (див. рис. 4.6).

Приклад. Частота появи події ***A*** (успішного складання іспиту студентом) у серії з $\boldsymbol{n} = 100$ спроб (число студентів на курсі) виявилася рівною $\boldsymbol{n}^* = 0{,}78$. Визначити 90% довірчий інтервал для ймовірності p події ***A***.

Розв'язання. Перевіряємо придатність використання нормального закону, для цього оцінимо величини $\boldsymbol{np}$ і $\boldsymbol{nq}$. Уважаючи $p \approx \boldsymbol{n}^*$, одержимо:

$$np \approx n \cdot n^* = 78; \quad nq \approx n \cdot (1 - p^*) = 22.$$

Обидві величини значно більше чотирьох, отже, нормальний закон можна застосовувати. Із табл. 4.6 для значення $\beta = 0{,}9$ знаходимо:

$$t_\beta = 1{,}643; \; D[p^*] = (0{,}78 \cdot 0{,}22)/(100 - 1) = 0{,}00173;$$

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{D[p^*]} = 0{,}041; \; \varepsilon = t_\beta \cdot \sigma_{p^*} = 1{,}643 \cdot 0{,}041 = 0{,}068.$$

Із формули (4.18) одержуємо:

$$p_1 = p^* - \sigma_{p^*} \cdot t_\beta = 0{,}712; \qquad p_2 = p^* + \sigma_{p^*} \cdot t_\beta = 0{,}848.$$

Тоді шуканий довірчий інтервал I_β для ймовірності p події ***A*** (успішного складання іспиту) за рівнем довірчої ймовірності $\beta = 0{,}9$ виявиться таким, що дорівнює:

$$I_\beta = (0{,}712; \; 0{,}848).$$

Чи відповідають дійсності рекламні дані про параметри того або іншого товару? Таке питання може виникнути в ході прийняття рішень щодо управління діяльністю підприємства. Відповідь на це питання можна одержати, розв'язавши задачу порівняння вибіркової середньої із значенням параметра, що анонсується. Розглянемо такий приклад.

Приклад. **Фірма-постачальник** комплектуючих виробів у рекламному буклеті стверджує, що середній термін безвідмовної роботи запропонованого виробу знаходиться у границях від 2600 до 3100 годин і в серед-ньому складає – 2900 годин. Перед закупівлею великої партії виробів

була зроблена вибірка з 50 виробів і проведені випробування. Середній $\left(\overline{\boldsymbol{T}}_{50}\right)$ термін безвідмовної роботи виявився рівним 2 720 годинам при “виправле-ному” середньому квадратичному відхиленні 361 годин. Необхідно при 5% рівні значущості:

1) перевірити гіпотезу про те, що значення 2900 годин дійсно є математичним сподіванням часу безвідмовної роботи виробів;

2) у випадку незадовільного результату перевірки оцінити:

– яким повинно бути мінімальне значення середнього часу роботи виробів в отриманій вибірці, при якому можна було б уважати рекламні дані дійсними;

– яким варто уважати *реальне* значення максимально можливого часу безвідмовної роботи виробу.

Розв’язання. Наявне число спроб $\boldsymbol{n}$ = 50 достатньо для того, щоб використовувати нормальний закон розподілу випадкового відхилення середнього значення від свого математичного сподівання.

1. Знайдемо розмір довірчого інтервалу середнього часу безвідмовної роботи виробу. Для цього з урахуванням 5% рівня значущості знаходимо спочатку величину $\beta = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$, потім із табл. 4.6 знаходимо величину t_β (0,95) = 1,96. Далі, за наявними початковими даними $\boldsymbol{n}$ = 50, σ_x = 361 і t_β (0,95) = 1,96, знаходимо величину довірчого інтервалу для оцінки середнього значення часу справної роботи виробів за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta = \frac{361 \cdot 1{,}96}{\sqrt{50}} = \frac{707{,}56}{7{,}07} = 100 \text{ годин.}$$

У спробі відхилення склало Δ = 2900 – 2720 = 180 годин, що перевершує розмір довірчого інтервалу ($180 > 100$). Отже, **фірма** в рекламі **завищує** термін безвідмовної роботи виробів.

2. Мінімальним значенням часу (T) безвідмовної роботи виробів у вибірці, при якому можна було б вважати рекламні дані дійсними, є час:

$$T = 2900 - \varepsilon = 2900 - 100 = 2800 \text{ годин.}$$

Реальне значення максимально можливого часу (T) безвідмовної роботи виробу за даними вибірки є:

$$T = 2720 + \varepsilon = 2720 + 100 = 2820 \text{ годин.}$$

У практиці страхового **бізнесу і** в практиці **менеджменту** іноді виникає необхідність **оцінити ймовірність** порівняно **рідкісних подій**, таких як аварії на виробництві, смерть застрахованої особи у результаті добре відпрацьованої і практично безпечної хірургічної операції, нещасний (або страховий) випадок природного характеру і т. ін. Причому може виявитися, що можливість розглянутого випадку теоретично існує, а реально такий випадок або не мав місця зовсім, або зафіксований один-два рази, що не дає підстав для статистичних оцінок. Як у такій ситуації

можна одержати кількісні оцінки, корисні для прийняття розв'язань, розглянемо на прикладі.

Приклад. Фірмою, що спеціалізується на транспортуванні озброєння, зроблено 100 перевірок саме довільного спрацьовування упакованого детонатора при падінні з вантажівки (подія ***A***). Детонатор не спрацював.

1. Знайти 90% довірчу оцінку ймовірності p саме довільного *неспрацьовування* упакованого детонатора при падінні з вантажівки.

2. Скільки разів потрібно переконатися у відсутності саме довільного спрацьовування упакованого детонатора при падінні з вантажівки, щоб із гарантією 95% стверджувати, що на практиці самовибух буде не більш ніж у 5% усіх випадків падіння?

Розв'язання. Шукана ймовірність p появи події ***A*** при ***n*** спробах є малою величиною, що дозволяє припустити її розподіл за законом Пуассона з математичним сподіванням $a = np$.

Довірчу ймовірність *непояви* події ***A*** (появи рівно 0 разів) відповідно до першого пункту задачі можна оцінити як $1-\beta$ і одночасно знайти цю ймовірність за формулою Пуассона:

$$P_{k=0} = \mathrm{e}^{-np} = 1-\beta .$$

Звідки для $\beta = 0{,}9$ знаходимо:

$$p = \frac{-\ln(1-\beta)}{n} = \frac{-\ln(0{,}1)}{100} = \frac{2{,}303}{100} = 0{,}023.$$

Для відповіді на друге питання врахуємо, що $\beta = 0{,}95$; $p = 0{,}05$. Із тієї ж формули одержуємо необхідне число спроб ***n***:

$$n = \frac{-\ln(1-\beta)}{p} = \frac{-\ln(0{,}05)}{0{,}05} = \frac{2{,}996}{0{,}05} = 59{,}9 \approx 60.$$

ПОРЯДОК ОЦІНЮВАННЯ

Відповідь на практичному занятті оцінюється за наступними критеріями:

- **8-7 балів** – курсант у повному обсязі опрацював програмний матеріал, основну і додаткову літературу, має глибокі й міцні знання, упевнено оперує набутими знаннями у вирішенні завдань, робить аргументовані висновки, може вільно висловлювати власні судження і переконувати інших, здатний презентувати власне розуміння питання.
- **6-5 балів** – курсант володіє навчальним матеріалом, формулює нескладні висновки, може узагальнювати набуті знання і частково застосовувати їх у вирішенні завдань, аргументація на достатньому рівні.
- **4-3 бали –** курсант загалом самостійно відтворює програмний матеріал, може дати стислу характеристику питання.
- **2 бали** у викладеному матеріалі є істотні прогалини, є певні неточності як у відтворенні матеріалу, так і у висновках, аргументація низька, використання набутих знань у вирішенні завдань на низькому рівні.
- **1 бал** – курсант за допомогою викладача намагається відтворити матеріал, але відповідь неточна, неповна, головний зміст матеріалу не розкрито, аргументація та власне розуміння питання майже відсутні; курсант із помітними труднощами використовує певні знання у вирішенні завдань.

Оцінювання ваших досягнень відбувається за системою відображеною в таблиці 1

Таблиця 1

№ теми	**Назви розділів і тем**	**Денна форма**	
		Усього	у тому числі **СЗ та ПЗ**
1	Лінійна алгебра	8	8
2	Матриці	8	8
3	Математичний аналіз	8	8
4	Інтеграл, диференціальні рівняння і ряди	8	8
5	Теорія ймовірностей	8	8
6	Випадкові величини та їх характеристики	8	8
7	Математична статистика	8	8
	Контрольна робота	4	4
Протягом вивчення курсу		**60**	
Іспит		**40**	
Всього		**100**	

Здобувачі вищої освіти або здобувачі вищої освіти, які впродовж семестру набрали менше 35 балів до складання іспиту не допускаються і залишаються на повторний курс.

Схема переведення балів у підсумкову оцінку наведена в таблиці 2.

Таблиця 2

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90 – 100	**A**	відмінно
82-89	**B**	добре
75-81	**C**	
64-74	**D**	задовільно
60-63	**E**	
35-59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання
0-34	**F**	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

ПОЛІТИКА АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ

Щодо рекомендацій з академічної доброчесності для закладів вищої освіти: Рекомендація *МОН України* від 23.10.2018 № **1/9-650.** URL: **https://zako№.rada.gov.ua/rada/show/v-650729-18** (дата звернення: 12.09.2019).

Академічна доброчесність – це сукупність етичних принципів та визначених законом правил, якими мають керуватися учасники освітнього процесу під час навчання, викладання та провадження наукової (творчої) діяльності з метою забезпечення довіри до результатів навчання та/або наукових (творчих) досягнень.

Дотримання академічної доброчесності педагогічними, науково-педагогічними та науковими працівниками передбачає:

- посилання на джерела інформації у разі використання ідей, розробок, тверджень, відомостей;
- дотримання норм законодавства про авторське право і суміжні права;

– надання достовірної інформації про методики і результати досліджень, джерела використаної інформації та власну педагогічну (науково-педагогічну, творчу) діяльність;
– контроль за дотриманням академічної доброчесності здобувачами освіти;
– об'єктивне оцінювання результатів навчання.

Дотримання академічної доброчесності здобувачами освіти передбачає:

– самостійне виконання навчальних завдань, завдань поточного та підсумкового контролю результатів навчання (для осіб з особливими освітніми потребами ця вимога застосовується з урахуванням їхніх індивідуальних потреб і можливостей);
– посилання на джерела інформації у разі використання ідей, розробок, тверджень, відомостей;
– дотримання норм законодавства про авторське право і суміжні права;
– надання достовірної інформації про результати власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використані методики досліджень і джерела інформації.

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ІСПИТУ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «Вища математика. Теорія ймовірності та математична статистика»

1. Що таке числова вісь, відрізок, координата точки? Як знайти довжину відрізка на числовій осі? Скільки точок уміщає числова вісь, скільки точок може бути розміщено на відрізку числової осі?

2. Сформулюйте поняття системи координат на прямій, у площині і у просторі. Що таке координатна площина? Як знайти координати точки на площині?

3.Що таке векторна величина, компоненти вектора? Яким може бути фізичний зміст компоненти вектора?

4.Як можна зобразити вектор на площині, у тривимірному і у ***n***-вимірному просторі?

5.Які операції над векторами називаються лінійними? Що таке лінійний ***n***-вимірний простір і як позначається такий простір у літературі?

6.Якими властивостями володіють лінійні операції над векторами?

7.У якому випадку система ***n***-вимірних векторів є лінійно залежною, а в якому – лінійно незалежною?

8.Що таке лінійна комбінація ***n***-вимірних векторів?

9.Як взаємопов’язані координати лінійно залежних векторів у тривимірному просторі? Як можна установити факт лінійної залежності або незалежності системи ***n***-вимірних векторів?

10. Що таке лінія на площині? Як можна записати рівняння кола в ко-ординатній та у параметричній формі? Якими є умови перетинання двох ліній на площині?

11. Запишіть рівняння прямої лінії на площині, яка (лінія) проходить через дві точки, рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом, загальне рівняння прямої лінії та поясніть сенс коефіцієнтів, які входять у ці рівняння. Що є кутовим коефіцієнтом прямої лінії на площині і який його геометричний зміст?

12. Як знайти кут між двома прямими лініями на площині?

13. Як з’ясувати, чи належить точка даній прямій лінії?

14. Як установити факт взаємної паралельності або перпендикулярності двох прямих ліній?

15. Що таке нормальне рівняння прямої лінії? Чому дорівнює сума квадратів коефіцієнтів при змінних x та y в такому рівнянні?

16. Як можна знайти відстань від точки до прямої лінії?

17. Що таке півплощина у просторі $\boldsymbol{R}_2$? Як записати рівняння півплощини і як дізнатися, чи належить точка даній півплощині?

18. Як записати загальне рівняння площини в тривимірному просторі (у $\boldsymbol{R}_3$), як цей запис пов’язаний із скалярним добутком векторів?

19. Що таке вектор нормалі до площини?

20. Як знайти кут між двома прямими лініями в $\boldsymbol{R}_3$ і як можна установити факт їх взаємної паралельності або перпендикулярності?

21. Як знайти кут між прямою лінією і площиною?

22. Як можна записати рівняння гіперплощини, півпростору і прямої лінії в $\boldsymbol{R}_n$?

23. Що таке направляючий вектор прямої лінії в просторі $\boldsymbol{R}_n$?

24. Що таке матриця, як вона пов’язана із системою лінійних рівнянь, що таке розширена матриця? Як позначається матриця, що таке розмір-ність матриці і як вона позначається? Де знаходиться головна і побічна діагоналі матриці і для яких типів матриць існують такі діагоналі? Як записуються матриці: діагональна, одинична і нульова? Що таке транспонована матриця?

25. Що таке формули Крамера, для чого використовуються і як записуються?

26. У якому випадку дві матриці називаються рівними одна одній?

У якому випадку і як можна знайти суму матриць, різницю матриць? Як можна помножити матрицю на число? Що таке протилежна матриця?

27. У якому випадку і як можна перемножити дві матриці? Які властивості притаманні добутку матриць?

28. Що таке власний вектор і власне число матриці?

29. Як можна знайти визначник квадратної матриці, використовуючи розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика?

30. Що таке матриця особлива, неособлива і обернена матриця? Як знайти обернену матрицю?

31. Що таке ранг матриці, базисний мінор? Які перетворення матриці називаються еквівалентними і як їх можна використовувати для відшукання рангу матриці?

32. Коли система лінійних рівнянь називається однорідною, неоднорідною, визначеною, невизначеною, сумісною і несумісною? Чи завжди однорідна система лінійних рівнянь має розв'язання

33. Як за допомогою оберненої матриці знайти розв'язання системи
n лінійних рівнянь із ***n*** невідомими?

34. Сформулюйте теорему Кронекера–Капелі.

35. Коли система лінійних рівнянь має нескінченне число розв'язків?
Яка система рівнянь називається еквівалентною і скільки рівнянь вона містить? Що таке базисні і небазисні (вільні) змінні і як вони взаємопов'язані? Чим відрізняється загальне розв'язання системи ***m*** рівнянь із ***n*** невідомими від її часткового і базисного розв'язання?

36. У чому полягає ідея і алгоритм розв'язання системи лінійних рівнянь методом повного виключення (методом Жордана – Гауса)?

37. За якою ознакою можна встановити несумісність системи рівнянь
у реалізації методу повного виключення?

38. Як реалізується табличний варіант методу повного виключення?

39. Як можна контролювати коректність обчислень при реалізації методу повного виключення?

40. Як можна знайти обернену матрицю системи, використовуючи метод повного виключення?

41. Які числа складають множину дійсних чисел? Чим відрізняються числа раціональні від ірраціональних?

42. Як знайти число, обернене до числа a, і число, протилежне числу a?
У чому розходження понять "інтервал", "відрізок" і "напівінтервал"? Чому дорівнює модуль числа a?

43. Що таке функція, область визначення функції? Які функції називаються основними елементарними функціями?

44. Чим відрізняються парні функції від непарних?

45. Дайте визначення понять: границя функції, однобічна границя, нескінченно мала функція.

46. Сформулюйте основні властивості нескінченно малих функцій: добуток нескінченно малої функції на обграничену, сума нескінченно малих функцій, нескінченно малі функції – еквівалентні, одного порядку малості, більш високого порядку малості.

47. Що таке невизначений інтеграл і якими основними властивостями він володіє? Поясніть суть основних методів інтегрування: безпосереднє інтегрування, підстановка, інтегрування частинами.

48. Сформулюйте поняття “визначений інтеграл” і поясніть його можливу геометричну інтерпретацію. Поясніть основні властивості визначеного інтеграла: перестановка границь інтегрування, інтеграл з однаковими границями, інтеграл від суми функцій та ін.

49. Як можна обчислити значення визначеного інтеграла?

50. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніца і поясніть способи обчислення визначеного інтеграла: заміна змінної й інтегрування частинами.

51. Напишіть формулу і поясніть спосіб обчислення площ плоских фігур у декартових координатах із використанням визначеного інтеграла.

52. У яких випадках виникає поняття “невласний інтеграл”?

53. Поясніть основні способи обчислення невласних інтегралів.

54. Сформулюйте поняття “диференціальне рівняння”.

55. Яка функція називається загальним і яка частковим розв’язанням диференціального рівняння?

56. Що називається перестановкою, розміщенням, сполученням? Запишіть формули для розрахунку цих величин.

57. Які події в теорії ймовірностей прийнято уважати випадковими?

58. Що таке ймовірність події?

59. Які події називаються вірогідними, а які – неможливими? Чому дорівнює ймовірність таких подій?

60. Які події вважаються сумісними, несумісними, рівноможливими, протилежними? Що можна сказати про ймовірність таких подій?

61. Які події складають повну групу подій і чому дорівнює ймовірність такої групи подій?

62. Як і чому можна розрахувати ймовірності подій у схемі випадків?

63. Що таке сума і добуток двох подій?

64. Як знайти ймовірність суми і добутку двох і більш подій з ураху-ванням їх сумісності або/і несумісності?

65. Для яких умов використовується формула Бернуллі? Запишіть
її вираз і поясніть використані позначення.

66. Поясніть основні елементи закону великих чисел – нерівність Чебишева і закон трьох сигм, а також закон розподілу суми випадкових величин.

67. Поясніть зміст поняття "збігається за ймовірністю" на прикладі ствердження теореми Чебишева, відповідно до якої при необмеженому збільшенні числа випробувань середнє арифметичне випадкової величини збігається за ймовірністю до її математичного сподівання.

68. Поясніть сенс вимог до статистичних оцінок параметрів: незсуненості, ефективності, обгрунтованості.

69. Що таке виправлена оцінка дисперсії випадкової величини?

70. Навіщо і як можна використовувати теорему Лапласа?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. Вид. 4-е, переробл. і допов. Київ: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.
2. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. Київ: «Знання», КОО, 2000. 119 с.
3. Вища математика: підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.
4. Мелащенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. Харків: ХНУВС, 2019. 100 с.
5. Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д. Вища математика: навч. посіб. Частина 1. Київ : Національна академія статистики, обліку і аудиту, 2013. 244 с.
6. Найко Д.А. Шевчук О.Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с.
7. Швець, В.Т. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси: навч. посіб. Одеса, 2021. 234 с.
8. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посіб. Вінниця: Видавничоредакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

9. Огірко О.І., Галайко Н.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Львів, 2017. 292 с.
10. Головня Р.М., Коваль В.О., Лущиков О.В. Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів: навч. посіб. Житомир: ЖДТУ, 2011. 140 с.
11. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: Ф. К. Благодир, Л. А. Благодир, С. О. Рудницький. Умань : Сочінський М. М., 2021. 125 с.
12. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2 ч. Ч. І. Теорія ймовірностей. Київ: КНЕУ, 2000. 304 с.